



Examen suisse de maturité, session d'été 2024

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPÉCIFIQUE

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 3 heures

Matériel autorisé : Calculatrice non programmable, formulaires et tables CRC/CRM/CRP
non annotés, règle, équerre, rapporteur, compas.

Total de points : 60

Consignes générales

L'épreuve écrite dure 3 heures avec une répartition conseillée d'une heure pour la partie Physique et de deux heures pour la partie Applications des Mathématiques. Les points étant répartis pour 1/3 à la Physique et 2/3 aux Applications des Mathématiques. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Présenter sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des Mathématiques. Indiquer clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro. A la fin de l'examen, il faut rendre ce document avec le travail.

Nombre de points obtenus :

Partie A : PHYSIQUE sur 20 pts

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES sur 40 pts

Total : sur **60 pts**

Note

Examineur(s)-trice(s) en charge de la correction :

.....

Remarque éventuelle :

.....

Partie A « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

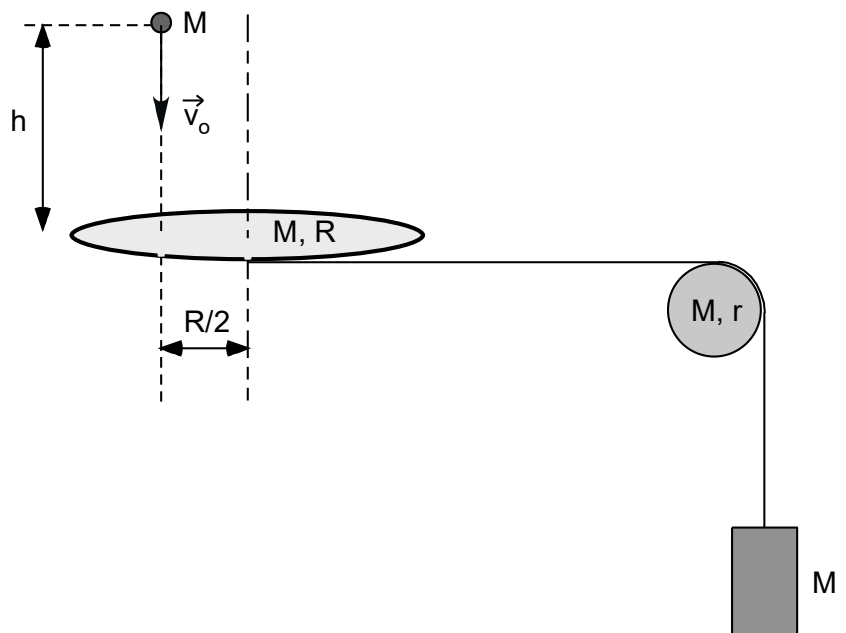
Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.

A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.

Problème 1 (12 points)

Dans ce problème tous les frottements seront négligés, sauf ceux entre la corde et la poulie qui permettent à la corde de ne pas glisser sur la poulie. Par ailleurs, tous les composants de l'expérience ont la même masse M , sauf la corde considérée de masse négligeable.

Un disque uniforme de masse $M_{\text{disque}} = M$ et de rayon R peut tourner librement autour d'un axe vertical passant par son centre. Une corde de masse négligeable et inextensible est enroulée sur sa circonférence. Cette corde passe, sans glisser, par une poulie idéale homogène de masse $M_{\text{poulie}} = M$ et de rayon r . Finalement à l'autre extrémité de la corde est suspendue une masse $M_{\text{suspendue}} = M$.



Une masse $M_{\text{tombante}} = M$, que l'on peut considérer comme ponctuelle, tombe à la verticale d'un point situé à la moitié du rayon R du disque.

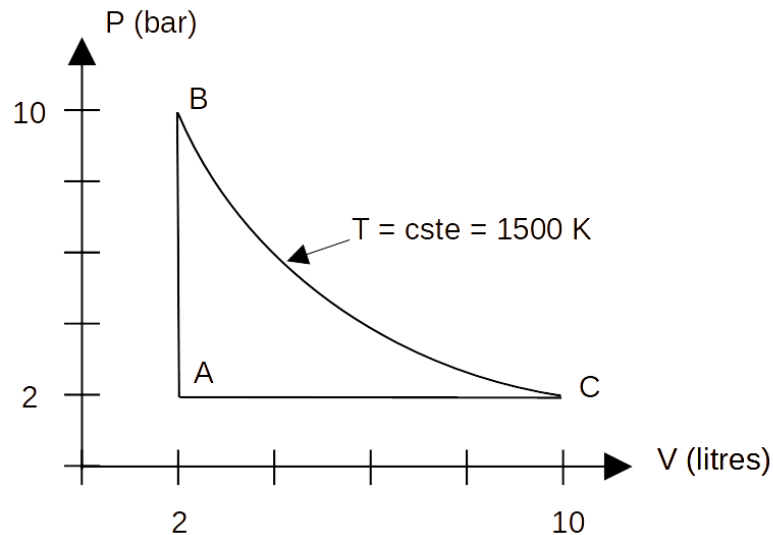
Lorsque la masse tombante se trouve à une hauteur h située au-dessus du disque, la grandeur de sa vitesse vaut v_0 . Lorsqu'elle arrive sur le disque, elle y reste collée.

- Calculer la vitesse avec laquelle la masse tombante touche le disque. Il est demandé d'écrire clairement la loi utilisée ainsi que de vérifier si les conditions pour l'utiliser sont remplies.
- Juste avant que la masse tombante ne touche le disque, celui-ci tourne avec une vitesse angulaire ω_0 . Juste après que la masse tombante s'est collée à lui, sa nouvelle vitesse angulaire vaut ω . On fera l'hypothèse que le choc est instantané.
 - Montrer que le moment d'inertie lorsque la masse tombante est collée au disque vaut $I = \frac{3}{4} MR^2$
 - Calculer ω en fonction de ω_0 . Il est demandé d'écrire clairement la loi utilisée ainsi que de vérifier si les conditions pour l'utiliser sont remplies.
- Calculer l'accélération de la masse suspendue une fois que la masse tombante s'est collée au disque. La corde ne glisse pas sur la poulie.

Problème 2

(8 points)

Un moteur thermique fonctionne avec $n = \frac{4}{3R}$ mol de gaz parfait diatomique qui passe par les états $A \rightarrow B \rightarrow C$ selon le diagramme pV (pression, volume) ci-dessous. La transformation $B \rightarrow C$ est isotherme à $T = 1500$ K. La température de l'état A vaut 300 K.



- Démontrer que la température en B vaut 1500 K.
- Démontrer que le travail mécanique fourni par une machine thermique vaut $A = \int p \cdot dV$
- Calculer la variation d'énergie interne, le travail et la chaleur échangée lors de chaque étape en justifiant les calculs.
- Calculer le rendement du cycle.
- Calculer le rendement thermodynamique théorique maximal possible avec les températures de ce cycle.

Partie B « APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (18 points)

On considère l'équation différentielle $y' = \frac{2y}{x} + 3x^2 \cos(\pi \cdot x)$ et on note s_k sa solution particulière satisfaisant la condition initiale $s_k(1) = k$ où k est un nombre réel.

a) Employer la méthode d'Euler pour estimer en 2 pas et en fonction de k la valeur de $s_k(2)$.

b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.

c) Prouver que $s_k(x) = kx^2 + \frac{3x^2 \sin(\pi \cdot x)}{\pi}$.

d) Déterminer la valeur de k pour laquelle l'estimation de $s_k(2)$ avec la méthode d'Euler en 2 pas coïncide avec $s_k(2)$.

Si l'estimation de $s_k(2)$ n'a pas été trouvée, prendre $s_k(2) \cong \frac{8k}{3} - \frac{7}{2}$ pour traiter cette question.

e) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $s_k(x)$ possède des zéros réels non nuls.

On ne demande pas de trouver ces zéros.

Problème 2 (10 points)

On considère les polynômes p et s donnés par $p(x) = 12x^3 + 20x^2 - 27x - 45$ et

$$s(x) = 12x^3 + 20x^2 + 3x + 5.$$

Écrire le polynôme p sous la forme d'un produit de 3 polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant qu'un des zéros de p est également un zéro de s .

Problème 3 (12 points)

On donne les points $P_1(0;8)$, $P_2(1;5)$, $P_3(2;3)$ et $P_4(3;2)$.

a) Déterminer la valeur de k pour laquelle la somme des carrés des distances verticales entre la courbe d'équation $y = k \cdot 2^{-x}$ et les quatre points donnés est minimale.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x qui approche ces points.

c) On fait bouger le point P_1 sur l'axe Oy , autrement dit, on remplace le point $P_1(0;8)$ par $P_1(0;c)$ où c est un nombre réel à déterminer. Trouver la valeur de c pour laquelle la pente de la droite de régression qui approche les quatre points est égale à $-\frac{3}{2}$.

