



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2022

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES, OPTION SPÉCIFIQUE

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 3h

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 60 points

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en une heure pour la partie Physique et deux heures pour la partie Applications des Mathématiques, les points étant répartis à 1/3 pour Physique et 2/3 pour Applications des mathématiques. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat ou la candidate présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il ou elle indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

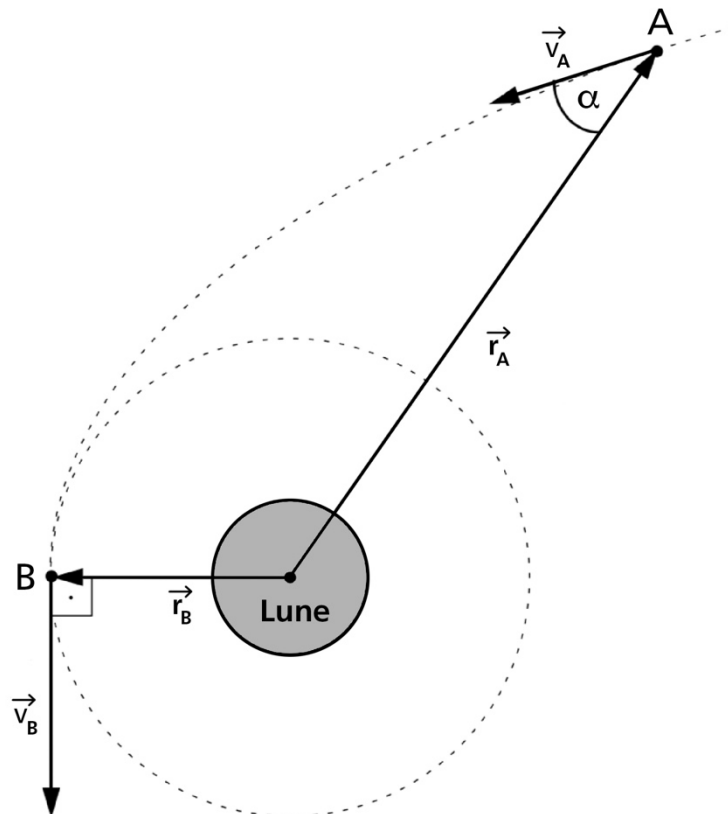
Durée indicative : 60 minutes

- Avant toute application numérique, une solution algébrique et un contrôle des unités sont exigés.
- Les réponses aux problèmes doivent comporter les explications et justifications nécessaires.
- A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.
- Le simple fait de recopier une formule des « formulaires et tables » ne constitue pas une réponse valable et ne donne pas lieu à une attribution de points.

Problème 1 (8 points)

Une sonde spatiale s'approche de la Lune. On admet que sur la trajectoire AB, la sonde ne subit que la force de gravitation de la Lune.

Au point B, la vitesse $\vec{v}_B$ de la sonde fait un angle droit avec le vecteur-position $\vec{r}_B$.



- a) Calculer l'énergie mécanique de la sonde au point A.
- b) Déterminer la vitesse de la sonde au point B.

Au point B, on utilise le moteur-fusée de la sonde pour faire une correction de vitesse afin de rendre la trajectoire de la sonde circulaire avec un rayon r_B .

- c) Calculer la force exercée par le moteur-fusée nécessaire pour effectuer la correction de trajectoire en 90 s.

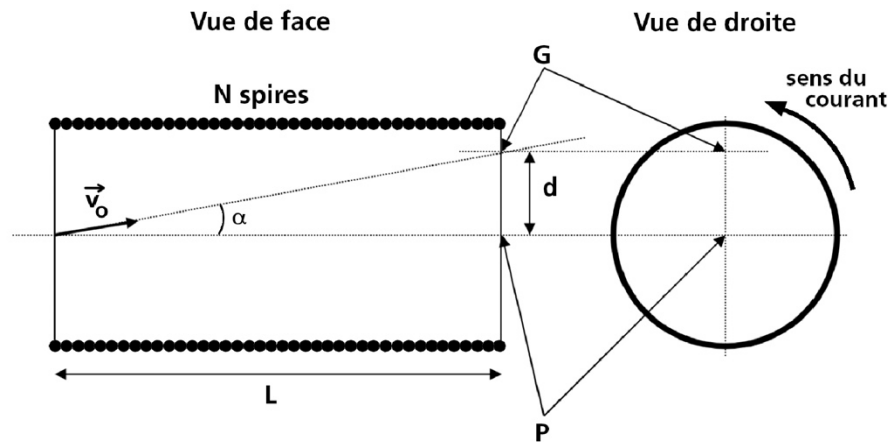
On admet que la force est constante et que la masse de la sonde ne varie pas.

Les candidats n'ayant pas répondu au point b) utiliseront la valeur (fausse) $v_B = 1'800 \text{ ms}^{-1}$.

Données numériques :

$$m = 960 \text{ kg} \quad v_A = 1'200 \text{ ms}^{-1} \quad r_A = 21'500 \text{ km} \quad r_B = 4'750 \text{ km} \quad \alpha = 18.75^\circ$$

Problème 2 (12 points)



Considérons un solénoïde, de longueur $L = 20 \text{ cm}$, comportant $N = 1500$ spires, qui crée un champ uniforme sur toute sa longueur lorsqu'il est parcouru par un courant continu constant. On néglige les effets de bord.

On injecte dans le tube un flux d'électrons, animés d'une vitesse $v_0 = 1,326 \cdot 10^4 \text{ km/s}$.

Les électrons entrent sous un angle α avec l'axe de symétrie du cylindre.

Lorsque le solénoïde n'est pas alimenté par un courant, les électrons en ressortent au point G, distant de $d = 2,989 \text{ cm}$ du point P, situé sur l'axe de symétrie du cylindre.

- Etablir l'expression de la norme du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité I . Citer la loi utilisée.
- Dessiner la trajectoire des électrons (sur la vue de face et sur la vue de droite) lorsque le solénoïde est parcouru par un courant I dans le sens indiqué sur le schéma ci-dessus (sur la vue de droite).

Dans ce qui suit, on envisage une solution non relativiste.

- Déterminer le sens et l'intensité du courant minimum I qui doit circuler dans le solénoïde pour que les électrons ressortent du cylindre au point P.

Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (17 points)

On donne les points $P_1(0;2)$, $P_2(1;3)$, $P_3(3;4)$ et $P_4(4;z)$ où z est un nombre **réel**.

On note $\bar{x}$ la moyenne des abscisses de ces points et $\bar{y}$ la moyenne des ordonnées de ces points. On note encore $\text{Var}(X)$ la variance des abscisses et $\text{Var}(Y)$ la variance des ordonnées.

a) Déterminer la valeur de z pour laquelle $\bar{x} = \bar{y}$.

b) Déterminer les valeurs de z pour lesquelles $\text{Var}(X) = 2\text{Var}(Y)$.

On s'intéresse maintenant à la droite de régression de y en x , d'équation $y = ax + b$.

On note $\rho(X, Y)$ le coefficient de corrélation correspondant.

c) Existe-t-il une valeur de z pour laquelle $\rho(X, Y) = 0$?

Si oui, donner cette valeur, sinon expliquer pourquoi c'est impossible.

d) Existe-t-il une valeur de z pour laquelle $\rho(X, Y) = 1$?

Si oui, donner cette valeur, sinon expliquer pourquoi c'est impossible.

e) Déterminer la valeur de z pour laquelle la pente de la droite de régression vaut 1.

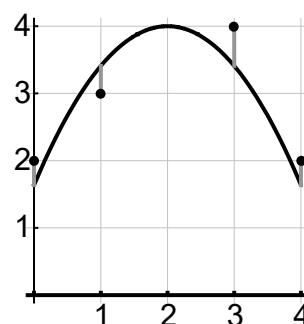
Pour la fin du problème, on pose $z = 2$, de sorte qu'on a $P_4(4;2)$.

On considère encore la famille de paraboles de sommet $S(2;4)$ et ainsi

d'équation $y = k(x-2)^2 + 4$ où k est un nombre réel.

f) Déterminer la valeur de k pour laquelle la somme des carrés des distances verticales entre la parabole et les quatre points $P_1(0;2)$, $P_2(1;3)$, $P_3(3;4)$ et $P_4(4;2)$ est minimale.

Il n'est pas nécessaire d'avoir traité le début du problème pour répondre à cette dernière question.



Problème 2 (12 points)

Le premier janvier 2023, un particulier emprunte 50'000 francs à une banque, le taux d'intérêt annuel est fixé à 3%.

- a) L'emprunteur rembourse sa dette en versant à la fin de chaque mois une mensualité (toujours la même). Déterminer le montant de chaque mensualité pour que la dette soit entièrement remboursée après 36 versements.

L'emprunteur décide de rembourser sa dette par un versement unique. Pour obtenir le montant nécessaire, il envisage les possibilités ci-dessous.

- b) Le premier jour de chaque mois, la première fois le premier janvier 2023, l'emprunteur verse une certaine somme sur un compte créditant des intérêts au taux annuel de 4%. Déterminer la somme à verser chaque mois pour que le capital acquis 3 ans plus tard (à la fin du 36^{ème} mois) permette de rembourser la dette de 50'000 francs (intérêts de la dette y compris).
- c) Le premier janvier 2023, l'emprunteur place 45'000 francs sur un compte créditant des intérêts selon un taux annuel constant. Déterminer ce taux pour que le capital acquis 3 ans plus tard permette de rembourser la dette de 50'000 francs (intérêts de la dette y compris).
- d) Le premier janvier 2023, l'emprunteur place 42'000 francs sur un compte créditant des intérêts au taux annuel de 5%. Déterminer le nombre d'années après lequel le capital acquis par ce placement permet de rembourser la dette de 50'000 francs (intérêts de la dette y compris). Arrondir la réponse au nombre entier le plus proche.

Problème 3 (11 points)

On considère l'équation différentielle $y' = \frac{-2y}{x} + 4x$ et on note $s(x)$ la solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(1) = 3$.

- a) Estimer $s(2)$ en utilisant la méthode d'Euler avec des pas de longueur $h = \frac{1}{2}$.
- b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle, puis la solution particulière $s(x)$.