



**Examen suisse de maturité, session d'été 2022**

**PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES, OPTION SPÉCIFIQUE**

**Candidat-e :**      Nom : ..... Prénom : ..... Numéro : .....

**Durée : 3h**

**Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables**

**Total de points : 60 points**

**Consignes générales**

Avant de débuter, le candidat ou la candidate contrôle le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. A la fin de l'examen, il ou elle rend ce document avec son travail.

Les réponses se font sur papier libre. Le candidat ou la candidate présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il ou elle indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en une heure pour la partie Physique et deux heures pour la partie Applications des Mathématiques, les points étant répartis à 1/3 pour Physique et 2/3 pour Applications des mathématiques. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Pour les problèmes de la partie Physique, avant toute application numérique, une solution algébrique et un contrôle des unités sont exigés. Les réponses aux problèmes doivent comporter les explications et justifications nécessaires. A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies. Le simple fait de recopier une formule des « formulaires et tables » ne constitue pas une réponse valable et ne donne pas lieu à une attribution de points.

Nombre de points obtenus :

|                                  |       |                   |
|----------------------------------|-------|-------------------|
| Physique :                       | ..... | sur 20 pts        |
| Applications des mathématiques : | ..... | sur 40 pts        |
| <b>Total :</b>                   | ..... | <b>sur 60 pts</b> |

Note

Examineur(s)-trice(s) en charge de la correction : .....

.....

Remarque éventuelle : .....

.....

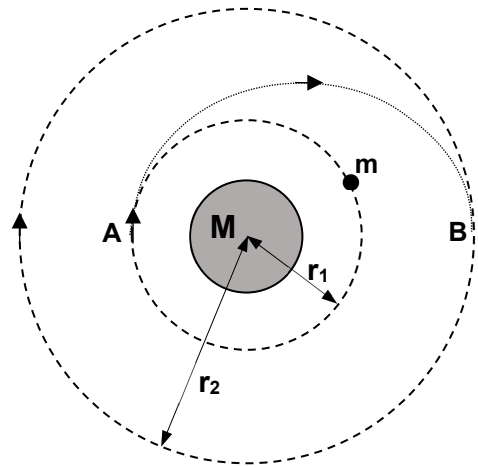
## Partie « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

### Phy - Problème 1 (11 points)

Les questions a), b), c) et d) peuvent être résolues indépendamment les unes des autres.

- a) Un satellite artificiel de masse  $m = 5$  tonnes décrit une orbite circulaire de rayon  $r_1 = 8 \cdot 10^5$  m autour d'un astre dont la masse vaut  $M = 6 \cdot 10^{21}$  kg (voir le dessin ci-dessous).
- a<sub>1</sub>) Calculer l'énergie potentielle du satellite.  
(Poser que l'énergie potentielle est nulle à " l'infini ").
- a<sub>2</sub>) Calculer l'énergie cinétique du satellite.
- a<sub>3</sub>) Calculer l'énergie mécanique du satellite.



- b) Lorsque le satellite passe au point **A** (cf dessin), sa vitesse est de  $v = 707$  m/s.  
On allume alors son moteur durant  $\Delta t = 30$  secondes.  
Le moteur exerce une poussée de  $F = 3 \cdot 10^4$  N.  
Durant ces 30 secondes cette poussée reste constamment parallèle à la vitesse, et on admet que l'accélération du satellite est constante.  
Calculer le travail effectué par la force du moteur.
- c) Après les 30 secondes de poussée, le satellite va trop vite pour rester sur cette orbite circulaire : sa trajectoire est maintenant elliptique. A l'échelle de l'orbite, la distance parcourue durant le fonctionnement du moteur est petite, c'est pourquoi on parle ici de "point" : le point **A** (cf dessin) devient le périée de cette nouvelle orbite.
- c<sub>1</sub>) Une fois le moteur coupé, seule la force de gravitation de l'astre agit sur le satellite : l'énergie mécanique du satellite est-elle conservée de **A** à **B** ? Justifier brièvement.
- c<sub>2</sub>) Qu'en est-il pour le moment cinétique ? Justifier brièvement.
- d) A l'apogée de sa trajectoire elliptique (point **B** sur le dessin), le satellite se trouve à  $r_2 = 2,95 \cdot 10^6$  m du centre de **M**.
- d<sub>1</sub>) Calculer sa vitesse ( $v_{apo}$ ) en ce point.
- d<sub>2</sub>) Calculer la vitesse  $v_2$  que devrait avoir le satellite pour que sa nouvelle orbite soit circulaire, de rayon  $r_2$ .
- e) Calculer l'énergie qu'il faudra encore dépenser (en allumant une 2<sup>e</sup> fois le moteur du satellite) pour que sa nouvelle orbite soit circulaire, de rayon  $r_2$ .

## Phy - Problème 2 (9 points)

Les questions a), b), c) et d) peuvent être résolues indépendamment les unes des autres.

Pour vérifier la valeur du rapport charge / masse de l'électron ( $q_e/m_e$ ), un physicien expérimental aimerait reproduire une expérience bien connue. Pour cela, il dispose de deux bobines dites de Helmholtz séparées par une distance de  $d = 15,5$  cm, égale à leur rayon  $R = 15,5$  cm, et composées chacune de 130 spires de fil de cuivre. Une ampoule en verre contenant de l'hydrogène à basse pression est placée au centre des deux bobines (cf. figure 1). Cette disposition des bobines ( $d = R$ ) a la particularité de générer un champ magnétique quasiment uniforme dans l'enceinte en verre.

Cette ampoule contient aussi un canon à électrons qui est décrit sur la figure 2.

Les molécules d'hydrogène heurtées par les électrons émettent une lumière fluorescente. Cette lumière rend apparente la trajectoire des électrons.

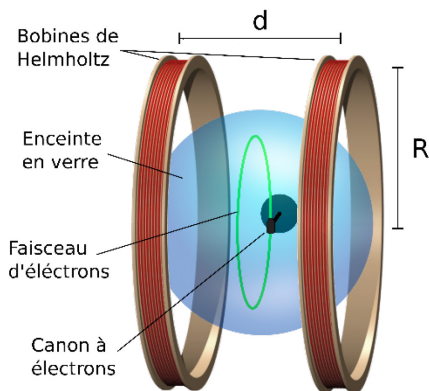


Fig. 1 : Dispositif de l'expérience

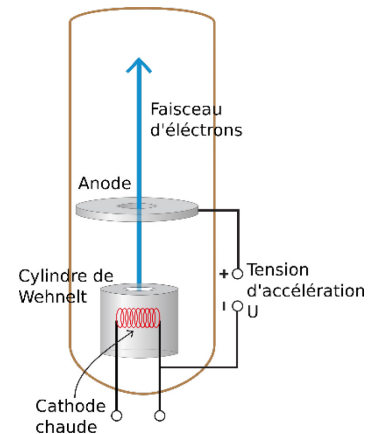


Fig. 2 : Canon à électrons

- a) Déterminer la vitesse des électrons à la sortie du canon à électrons lorsqu'on applique une tension d'accélération de  $U = 200$  V. La vitesse initiale des électrons est supposée nulle.
- b) Si aucun courant ne circule dans les bobines, les électrons du faisceau suivent une trajectoire rectiligne comme sur la figure 3.

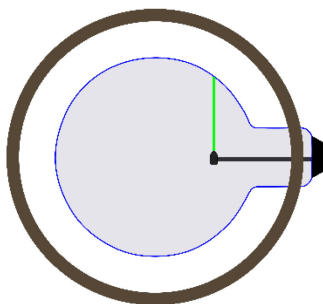


Fig. 3 : Vue de profil sans champ magnétique

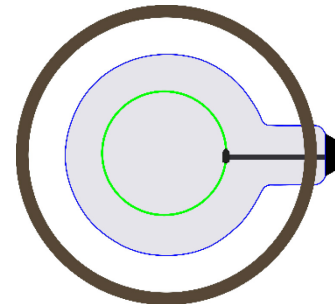


Fig. 4 : Vue de profil en fonctionnement

- b<sub>1</sub>) Expliquer pourquoi ce n'est plus le cas lorsque les bobines sont alimentées par un courant continu (figure 4). Quelle force doit-on considérer ?
- b<sub>2</sub>) Dessiner sur la figure 4 le sens du champ magnétique créé par le courant qui circule dans les bobines.
- c) En ignorant la présence de l'autre bobine, calculer l'intensité du champ magnétique au centre d'une seule bobine lorsqu'elle est alimentée par un courant d'une intensité  $I = 2$  A.
- d) La valeur du champ magnétique dans toute l'ampoule étant de  $B = 9 \cdot 10^{-4}$  T et la vitesse des électrons valant  $v = 7,39 \cdot 10^6$  m/s, en déduire le rayon du faisceau d'électrons.
- e) En combinant les expressions littérales des réponses a) et d), exprimer algébriquement le rapport  $q_e/m_e$  en fonction de la tension d'accélération  $U$ , du rayon  $r$  du faisceau d'électrons et de l'intensité du champ magnétique  $B$ .

## Partie « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

### A.M. - Problème 1 (15 points)

On considère l'équation différentielle  $y' = 3y + a \cdot x \cdot e^x$  où  $a$  est un nombre réel. On donne également la condition initiale  $y(0) = -1$ .

- a) On emploie la méthode d'Euler pour estimer en 2 pas la valeur de  $y(2)$ .  
Trouver la valeur de  $a$  pour laquelle cette estimation vaut 0.
- b) On considère la fonction  $f(x) = (-4x - 2)e^x + e^{3x}$ . Vérifier que  $f$  respecte la condition initiale de l'équation différentielle, puis trouver la valeur de  $a$  pour laquelle cette fonction est une solution particulière de l'équation différentielle.

Pour la suite du problème, on choisit  $a = -4$  et l'équation devient  $y' = 3y - 4x \cdot e^x$ .

- c) Trouver la solution générale de cette équation différentielle.

On s'intéresse finalement à la solution particulière  $s$  qui satisfait la condition initiale  $s(0) = -1$ .

- d) Prouver que  $s(x) = (2x + 1)e^x - 2e^{3x}$ .

### A. M. - Problème 2 (10 points)

On considère la fonction polynomiale  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x - 14$  dont le graphe est esquissé ci-contre. On aimerait trouver une approximation du zéro de cette fonction.

- a) Si on veut appliquer la méthode de Newton (ou de la tangente), quelles sont les valeurs initiales qui ne fourniront aucun résultat ?
- b) Calculer une approximation du zéro de  $f$  en appliquant une fois la formule de Newton. En tirant profit de l'allure du graphe, mais sans y mesurer de longueurs, choisir une valeur initiale qui donnera une approximation proche de la réalité.
- c) Déterminer un intervalle de longueur 1 contenant le zéro de  $f$ , puis calculer une nouvelle approximation de ce zéro au dixième près, en appliquant la méthode de la bisection.



### **A.M. - Problème 3** (15 points)

Un bar est spécialisé dans les smoothies, boissons formées à partir de lait et de fruits.

Chaque matin, le restaurateur dispose de 2 kg de fraises, 9 kg de bananes et 10 kg de lait avec lesquels il produit deux types de smoothies, les « fraise banane » abrégés *FB* et les « banane pure » abrégés *BP*.

Les ingrédients pour faire un verre de smoothie *FB* sont 40 g de fraises, 60 g de bananes et 100 g de lait, alors que pour faire un verre de smoothie *BP* il faut 100 g de bananes et 100 g de lait.

On note  $x$  le nombre de verres de *FB* et  $y$  le nombre de verres de *BP*.

- a) Déterminer graphiquement le domaine (sous-ensemble du plan) dans lequel on peut choisir  $x$  et  $y$ . Hachurer ce domaine.
- b) Les verres de *FB* sont vendus 5.- et les verres de *BP* 4.-. On suppose de plus que tous les verres produits sont vendus.

Combien de verres de *FB* et combien de verres de *BP* doit produire ce restaurateur pour obtenir le plus grand bénéfice possible ?

Lui reste-t-il des fraises, des bananes ou du lait après avoir réalisé ses smoothies ? Si oui, combien ?

- c) Le restaurateur remarque qu'il vend plus de verres de *BP* que de *FB* et décide d'inverser les prix. Quel est alors le plus grand bénéfice possible ?

Lui reste-t-il des fraises, des bananes ou du lait après avoir réalisé ses smoothies ? Si oui, combien ?