



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2021

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en une heure pour la partie Physique et deux heures pour la partie Applications des Mathématiques, les points étant répartis à 1/3 pour Physique et 2/3 pour Applications des mathématiques. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat ou la candidate présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il ou elle indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.

A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.

Problème 1 (13 pts)

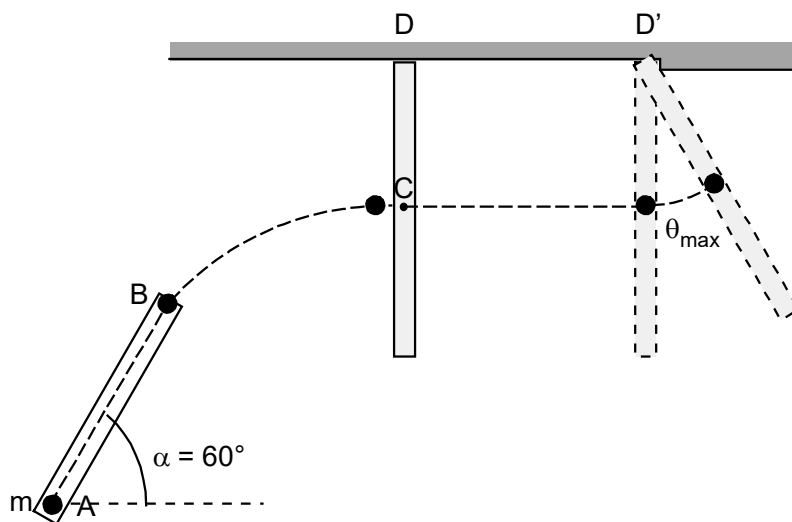
Dans ce problème, tous les frottements sont négligeables. Prendre $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Une masse $m = 0,40 \text{ kg}$, considérée comme ponctuelle, glisse le long d'un canon incliné avec un angle $\alpha = 60,0^\circ$ par rapport à l'horizontale du point A jusqu'au point B. Elle possède au point A une vitesse $v_A = 13,0 \text{ m/s}$. Le canon a une longueur $d = 1,20 \text{ m}$.

Ayant quitté le canon au point B, la masse aura une trajectoire balistique jusqu'au point C. A cet endroit, la masse sera à son point culminant.

La masse entre alors en collision parfaitement inélastique avec une tige mince homogène de masse $M = 3,00 \text{ kg}$ et de longueur $\ell = 1,40 \text{ m}$. Le choc a lieu au point C qui se trouve être le centre de masse de la tige. La tige peut glisser horizontalement le long d'un rail.

L'extrémité de la tige se déplace donc du point D au point D'. A cet endroit, une butée stoppe brutalement l'extrémité de la tige qui se balance alors avec comme centre de rotation le point D'.

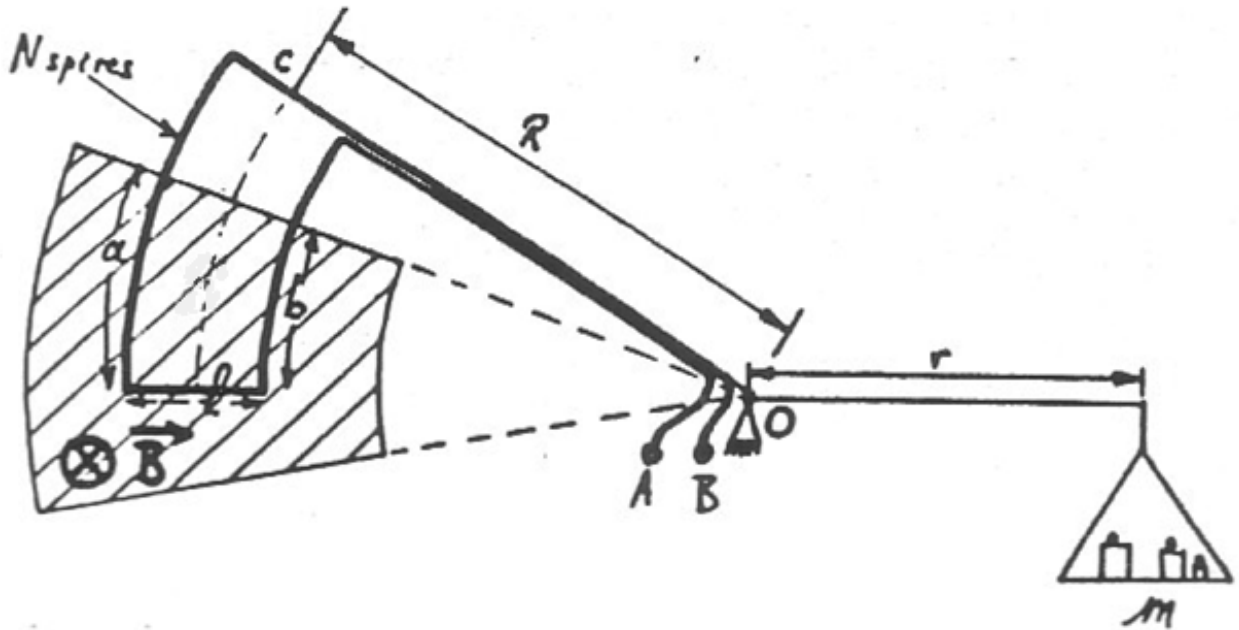


- 1) Déterminer l'intensité de la vitesse v_B de la masse au point B.
- 2) Déterminer la vitesse de la tige et de la masse v' après le choc mou.
- 3) Déterminer l'amplitude maximale $\theta_{\max}$ que la tige forme avec l'axe vertical.

Problème 2

(7 pts)

Le dispositif suivant sert à mesurer des champs magnétiques avec précision.



Le fléau gauche de la balance est constitué par un cadre de N spires alimenté en courant I par un générateur de tension branché aux bornes A et B.

Ce cadre est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ homogène dans la région hachurée et nul à l'extérieur. De cette manière, la partie c du cadre n'est jamais dans le champ $\vec{B}$.

Le système est équilibré grâce à des masses m disposées sur le plateau du fléau droit de la balance.

L'axe de rotation de la balance est situé au point O. Le fléau gauche a une longueur R et celui de droite, une longueur r.

- 1) Déterminer la polarité de A et de B pour que le système soit en équilibre.
- 2) Dessiner les forces agissant sur les côtés a, b, c et l du cadre.
- 3) Justifier la forme du cadre : pourquoi n'est-il pas rectangulaire ?
- 4) Exprimer la valeur de la norme du champ $\vec{B}$ en fonction des caractéristiques de la balance (m, r, N, R, I et l).
- 5) Calculer la valeur du champ $\vec{B}$ avec les valeurs numériques suivantes :
m = 75 g, r = 10 cm, R = 15 cm, I = 5 A, l = 2,5 cm, N = 6 spires.

Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (12 points)

Les individus d'une population sont, jour après jour, infectés par un virus. Des tests ont permis de déterminer la proportion de la population infectée (en %) en fonction du nombre de jours écoulés depuis la première infection. Ainsi, on a constaté que 0.4% de la population était infectée au jour 0 et 1% au jour 1.

Pour la suite du problème, on appelle x le numéro du jour et y la proportion de la population infectée (en %).

Les résultats des tests pour les jours 0, 1, 2 et 3 sont représentés dans le tableau ci-dessous.

x	0	1	2	3
y	0.4	1	3	8

- a) En employant les quatre points définis par le tableau ci-dessus, déterminer l'équation de la droite de régression $y = a \cdot x + b$ qui approche la proportion de la population infectée en fonction du nombre de jours écoulés.
- b) En admettant que la proportion de la population infectée évolue conformément à l'équation trouvée, déterminer le jour lors duquel toute la population sera infectée.
Si l'équation de la droite de régression n'a pas été trouvée à la question précédente, prendre $y = 2.51x - 0.72$ pour répondre à cette question.
- c) En supposant que la proportion de la population infectée en fonction du nombre de jours écoulés est donnée par une fonction de la forme $f(x) = c \cdot e^x$, déterminer la valeur de c pour laquelle la somme des carrés des distances verticales entre le graphe de f et les quatre points définis par le tableau ci-dessus est minimale.
- d) En admettant que la proportion de la population infectée évolue conformément à la fonction f trouvée, déterminer le jour lors duquel toute la population sera infectée.
Si la valeur de c n'a pas été trouvée à la question précédente, prendre $c = 0.36$ pour répondre à cette question.

Problème 2 (15 points)

On considère l'équation différentielle $y' = 2y + a \cdot x + b$ où a et b sont des nombres réels. On donne également la condition initiale $y(0) = 1$.

- a) On emploie la méthode d'Euler pour estimer en 2 pas les valeurs de $y(2)$ et $y'(2)$.
Trouver les valeurs de a et b si les estimations obtenues sont $y(2) \cong 0$ et $y'(2) \cong 3$.

Pour la suite du problème, on choisit $a = -2$ et $b = 1$ (qui ne sont pas les valeurs cherchées à la question précédente). On a donc l'équation $y' = 2y - 2x + 1$.

- b) Trouver la solution générale de cette équation différentielle.

On s'intéresse maintenant à la solution particulière s qui satisfait la condition initiale $s(0) = 1$.

- c) Prouver que $s(x) = x + e^{2x}$ (peut se faire sans avoir trouvé la solution générale).
d) Prouver que la fonction s possède un zéro dans l'intervalle $[-1; 0]$, puis calculer une estimation de ce zéro en itérant 2 fois la formule de Newton (méthode de la tangente) et en choisissant la valeur initiale $x_0 = 0$.

Problème 3 (13 points)

Remarque

Arrondir toutes les réponses relatives à des sommes d'argent au franc le plus proche.

Le premier janvier 2022, un particulier emprunte 100'000 francs à une banque, le taux d'intérêt annuel est fixé à 4%.

- a) L'emprunteur rembourse sa dette en versant à la fin de chaque année une annuité de 25'000 francs. Établir le tableau d'amortissement de l'emprunt en précisant la dette subsistant après chaque versement. Donner également le montant du dernier versement, de moins de 25'000 francs et effectué une année après l'avant-dernier.
- b) Déterminer le taux d'intérêt mensuel équivalent à un taux annuel de 4%.
Si ce taux n'a pas pu être déterminé, prendre pour la suite du problème un taux mensuel égal à 0.345%.
- c) L'emprunteur rembourse sa dette en versant à la fin de chaque mois une mensualité de 2'000 francs. Déterminer le nombre de mensualités et calculer le montant du dernier versement, de moins de 2'000 francs et effectué un mois après l'avant-dernier.
- d) Une autre banque propose un crédit de 100'000 francs remboursable en 48 mensualités de 2'200 francs, à verser à la fin de chaque mois. Déterminer par un calcul si cette autre banque offre un taux d'intérêt plus avantageux que la première.