



**Examen suisse de maturité, session d'été 2021**

**PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE**

Durée : 3h

**Candidat :**      Nom : ..... Prénom : ..... Numéro : .....

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en une heure pour la partie Physique et deux heures pour la partie Applications des Mathématiques, les points étant répartis à 1/3 pour Physique et 2/3 pour Applications des mathématiques. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat ou la candidate présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il ou elle indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE ..... / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES ..... / 40 points

Total ..... / 60 points

Note : .....

## Partie A « PHYSIQUE »

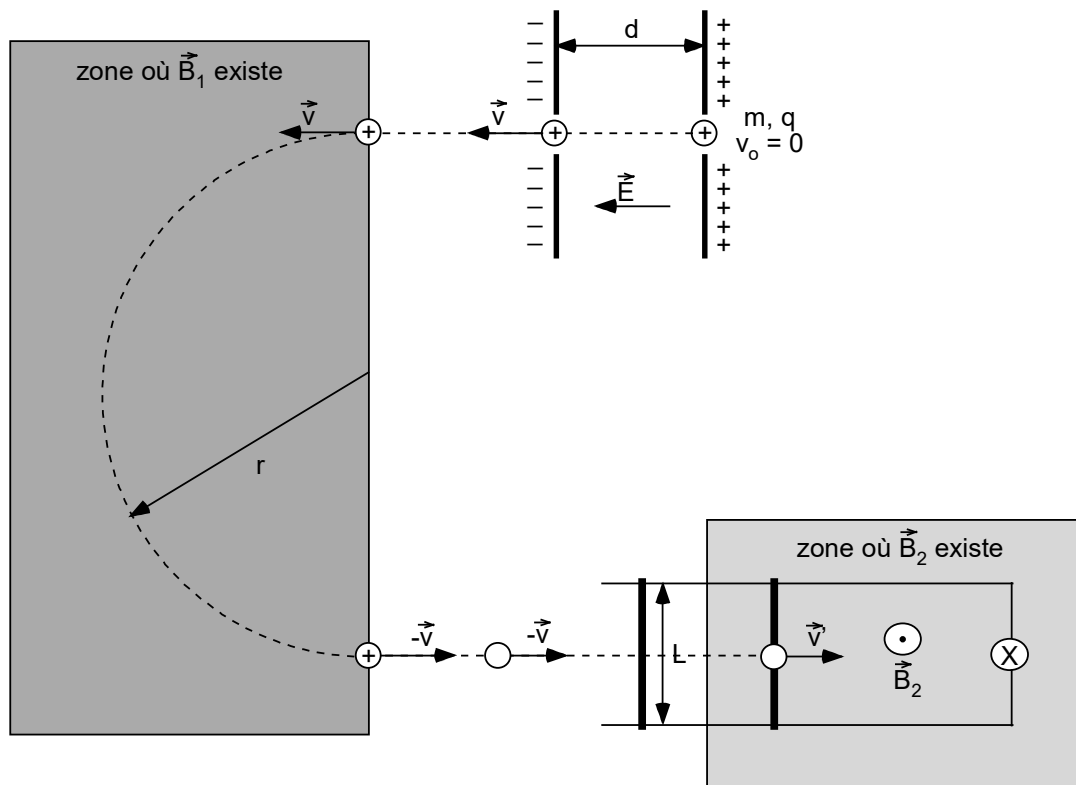
*Durée indicative : 60 minutes*

*Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.*

*A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.*

### **Problème 1** (14 pts)

Le problème se passe dans l'espace où la gravité est négligeable, tout comme les frottements. Entre les plaques parallèles d'un condensateur, distantes de  $d = 45,0$  cm, chargées et percées chacune d'un petit trou en leur milieu, règne un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme. Une particule, de masse  $m = 0,180$  g et de charge  $q = + 5,00$   $\mu\text{C}$  se trouvant initialement au repos ( $v_0 = 0$ ) au niveau du trou de la plaque chargée positivement est accélérée et quitte la plaque négative avec une vitesse  $v = 150$  m/s.



- a) Quelle est l'intensité du champ électrique  $\vec{E}$  ?

Après avoir quitté le condensateur, la particule entre, toujours avec une vitesse  $v = 150$  m/s, dans une zone où existe un champ d'induction magnétique  $\vec{B}_1$  uniforme dont les lignes de champ sont perpendiculaires à la vitesse de la particule et à cette feuille.

- b) Déterminer le sens du champ  $\vec{B}_1$  pour que la trajectoire de la particule soit celle dessinée. Représenter ce champ sur le schéma.
- c) Quelle doit être l'intensité  $B_1$  du champ  $\vec{B}_1$ , pour que le rayon de la trajectoire de la particule soit  $r = 10,0$  km ?

Après avoir fait un demi-tour, la particule sort, toujours avec la même vitesse  $v = 150 \text{ m/s}$ , de la zone où le champ  $\vec{B}_1$  existe. Elle capte alors des électrons qui la rendent neutre sans modifier significativement ni sa vitesse ni sa masse. Sa trajectoire est maintenant rectiligne et elle heurte en son milieu un barreau immobile de masse  $M = 2,00 \text{ g}$ . Le choc est parfaitement inélastique (= choc mou). Le barreau est posé sur deux rails horizontaux malgré l'absence de gravité.

d) Quelle sera la vitesse  $v'$  du duo particule/barreau après le choc ?

Les deux rails horizontaux, conducteurs et de résistance électrique négligeable, sont connectés l'un et l'autre à une ampoule électrique dont la résistance vaut  $R = 4,00 \Omega$ . Le barreau, de longueur  $L = 7,00 \text{ cm}$ , a également une résistance négligeable. Le duo particule/barreau continue de se déplacer sans frottements sur les rails, avec lesquels il reste en contact malgré l'absence de gravité, pour pénétrer dans une zone où existe un deuxième champ d'induction magnétique  $\vec{B}_2$  uniforme, également perpendiculaire à la feuille et qui sort de la feuille. L'intensité de ce champ vaut  $B_2 = 600 \text{ mT}$ .

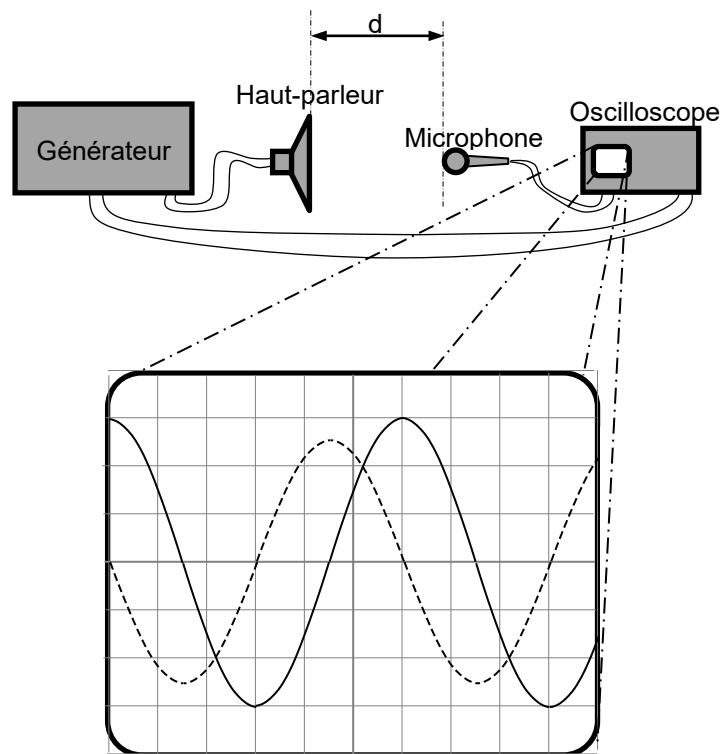
e) Représenter sur le schéma la force extérieure  $\vec{F}$  nécessaire pour que le duo particule/barreau garde sa vitesse  $v'$  constante. Justifier la réponse.

f) Déterminer l'intensité  $F$  de cette force.

g) Déterminer la puissance dissipée dans l'ampoule.

## Problème 2 (6 pts)

Un haut-parleur est mis en vibration à l'aide d'un générateur réglé à la fréquence  $f$ .  
Un microphone est placé à la distance  $d$  du haut-parleur. Un oscilloscope affiche les ondes émises par le générateur et (indépendamment) reçues par le microphone.



- L'axe horizontal représente le temps et chaque carré vaut 0,100 ms.  
Déterminer la fréquence  $f$  de ces ondes.
- L'axe vertical représente le signal et chaque carré vaut 100 mV.  
Calculer les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  des deux ondes.
- On augmente  $d$  en éloignant progressivement le microphone du haut-parleur. Pour deux valeurs successives  $d_1$  et  $d_2$  telles que  $d_2 - d_1 = 20,0$  cm, on obtient chaque fois deux courbes en phase (= superposées).  
En déduire la longueur d'onde  $\lambda$  et la vitesse  $v$  du son dans l'air.
- Calculer  $d$ , sachant qu'elle est comprise entre 41,0 et 47,0 cm.

## Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

### Problème 1 (23 points)

Une épidémie touche un pays imaginaire de 1'000'000 d'habitants.

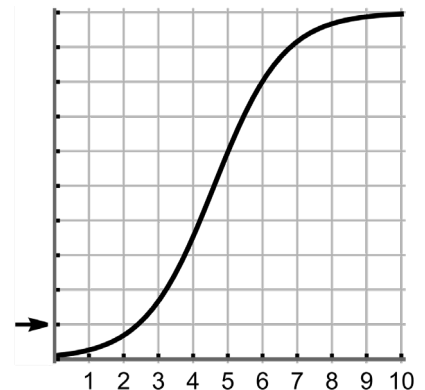
Un modèle mathématique simple suppose que le nombre de malades évolue au cours du temps selon une fonction  $y(t)$  satisfaisant l'équation différentielle  $y' = y \cdot \left(1 - \frac{1}{1'000'000} y\right)$ .

- a) Sachant qu'au temps  $t = 0$  le pays compte 10'000 malades, estimer, en utilisant trois pas de la méthode d'Euler, le nombre de malades au temps  $t = 3$ . On arrondira tous les résultats au nombre entier le plus proche.
- b) Vérifier, sans forcément résoudre l'équation différentielle, que sa solution générale peut s'écrire  $y(t) = 1'000'000 \frac{e^t}{c + e^t}$ , puis déterminer une solution particulière, sachant qu'au temps  $t = 0$  la population de ce pays compte 10'000 malades.

- c) On pose  $c = 100$  et on considère une autre solution particulière  $y(t) = 1'000'000 \frac{e^t}{100 + e^t}$ .

Le graphe de  $y$ , pour  $t \in [0; 10]$ , est donné ci-contre.

- c1) Préciser la valeur du premier trait horizontal (indiqué par une flèche) du quadrillage du dessin ci-contre.
- c2) Calculer le temps  $t$  pour lequel, selon ce modèle, le 90% de la population est malade.
- c3) Sur le graphique, on constate que la maladie commence par se propager lentement, puis plus rapidement et finalement de nouveau plus lentement. Pour quel temps  $t$ , la propagation de la maladie est-elle maximale selon ce modèle ?



- d) Un modèle plus précis, tenant compte des personnes immunisées ou vaccinées, procure pour le nombre de malades une autre fonction donnée par  $y(t) = 1'000'000 \frac{e^t}{100 + t \cdot e^t}$ .

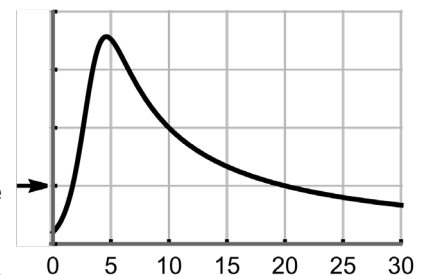
Le graphe de  $y$ , pour  $t \in [0; 30]$ , est donné ci-contre.

- d1) Préciser la valeur du premier trait horizontal du quadrillage du dessin ci-contre.

- d2) Avec ce modèle, calculer le nombre maximum de malades.

- d3) On peut constater par calcul que  $y(33) \cong 30'303$  et que  $y(34) \cong 29'412$ .

Déterminer, en utilisant la méthode de bisection, une valeur de  $t$  pour laquelle  $y(t) \cong 30'000$ . La réponse doit être donnée avec un chiffre après la virgule.



## **Problème 2** (17 points)

On donne le polynôme  $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 53x + 84$ .

- a) On aimerait trouver un zéro de ce polynôme avec la formule de Newton (méthode de la tangente). Prouver qu'en choisissant la valeur initiale  $x_0 = -1$ , on obtient un zéro du polynôme  $p$  en appliquant une seule fois la formule de Newton.

On considère un autre polynôme  $q(x) = 4x^3 + 4x^2 - 33x - 45$ .

- b) En employant le schéma de Horner, vérifier que  $x_1 = 3$  est un zéro du polynôme  $q$ .
- c) Écrire le polynôme  $q$  sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à **coefficients entiers**.
- d) On aimerait trouver le zéro  $x_1 = 3$  de ce polynôme avec la méthode de la tangente. Déterminer la valeur initiale  $x_0$  qu'il faut choisir ( $x_0 \neq 3$ ), pour qu'on obtienne ce zéro en appliquant une seule fois la formule de Newton.