



Examen suisse de maturité, session d'été 2020

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique, les points étant répartis à 2/3 pour Applications des Mathématiques et 1/3 pour Physique. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des Mathématiques. Il numérote les pages et indique clairement sur chaque feuille son nom, prénom et numéro. A la fin de l'examen, il place son travail à l'intérieur de ce document et le rend au personnel assurant la surveillance.

Partie A : PHYSIQUE/ 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES/ 40 points

Total/ 60 points Note :

Examineur/trice : Date : Signature :

Expert/e : Date : Signature :

Partie A « Physique »

Durée indicative : 60 minutes

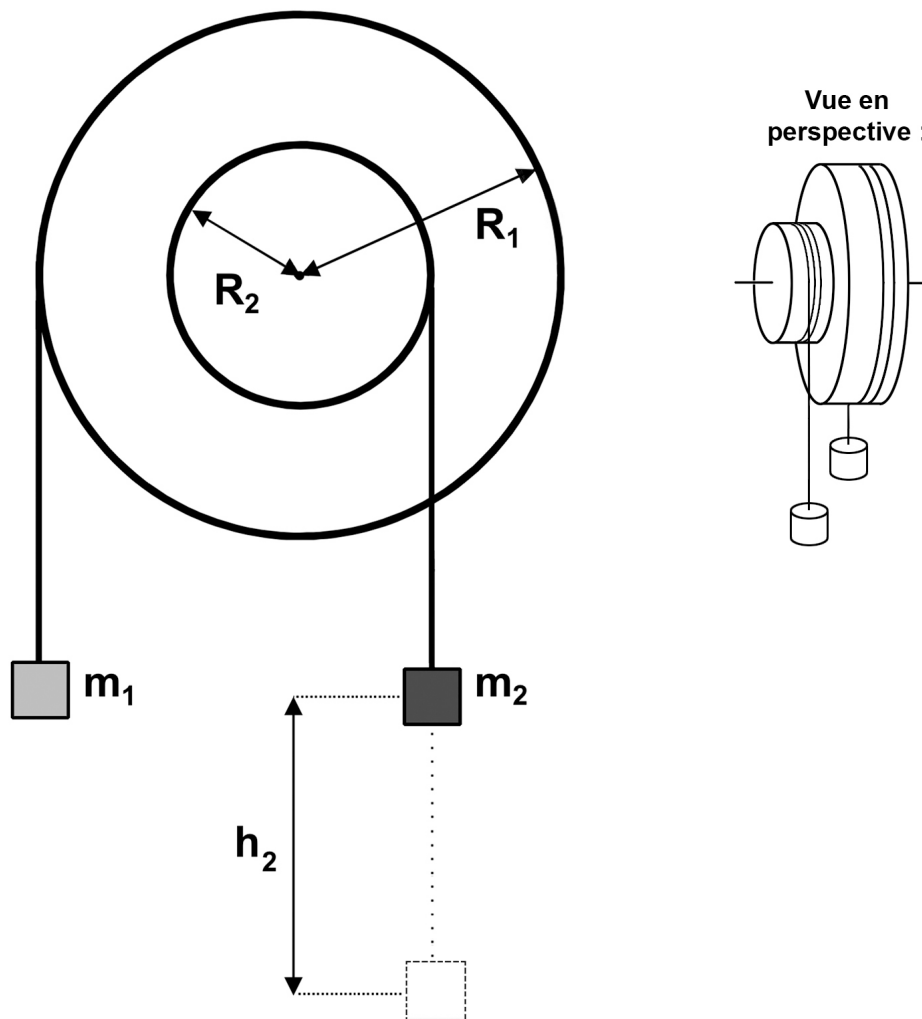
- Avant toute application numérique, une solution algébrique et un contrôle des unités sont exigés.
- Les réponses aux problèmes doivent comporter les explications et justifications nécessaires.
- A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.
- Le simple fait de recopier une formule des « formulaires et tables » ne constitue pas une réponse valable et ne donne pas lieu à attribution de points.

Valeurs numériques :

- Pour l'accélération « g » de la pesanteur terrestre, prendre $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Donnez vos résultats en unités du Système International d'unités, avec 3 chiffres significatifs.

Problème 1 (12 points)

Deux masses m_1 et m_2 sont suspendues à deux fils inextensibles et dont les masses sont négligeables. Les fils sont enroulés autour de deux cylindres pleins qui peuvent tourner sans frottement autour d'un axe commun, confondu avec leur axe de révolution. Les cylindres sont collés l'un à l'autre. Le premier cylindre a une masse $M_1 = 100$ kg et un rayon $R_1 = 1,20$ m, le second une masse $M_2 = 50$ kg et un rayon $R_2 = 0,40$ m. La masse m_1 vaut 10 kg, la masse m_2 est plus lourde que m_1 .



- Représenter l'ensemble des forces qui agissent sur chacun des deux cylindres, ainsi que sur les masses m_1 et m_2 lorsque le système est en équilibre statique.
On demande de dessiner les forces en tenant approximativement compte de leur intensité.
- On suspend une masse m_2 de 50 kg, de sorte que les disques tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.
Déterminer la valeur de l'accélération angulaire des cylindres.
- On laisse se dérouler le fil inextensible enroulé autour du cylindre de rayon R_2 .
Calculer la vitesse angulaire des cylindres au moment où la masse m_2 , initialement au repos, est descendue d'une hauteur $h_2 = 50$ cm.

Problème 2 (8 points)

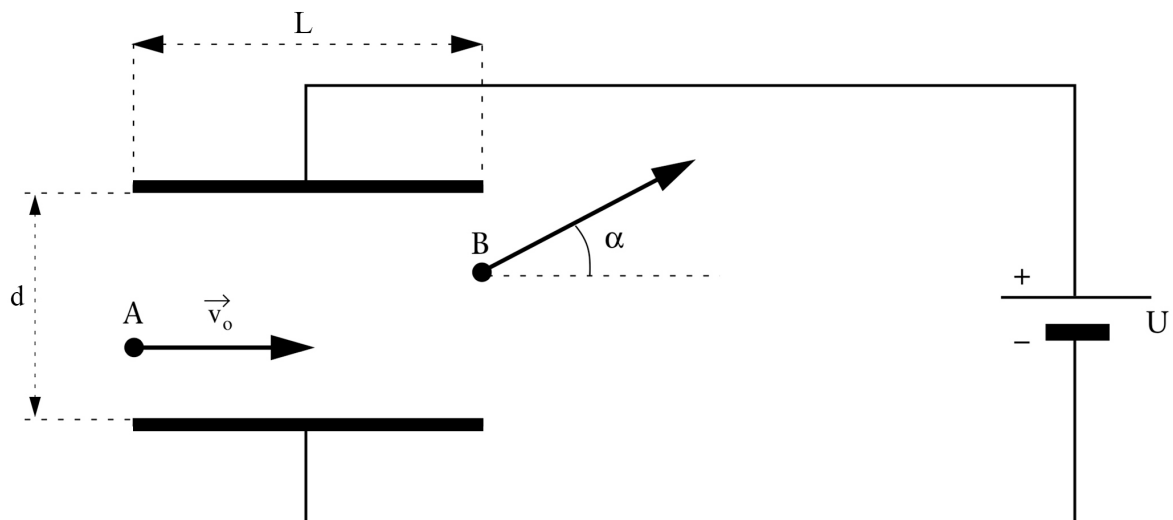
On relie un condensateur plan de capacité C à un générateur de tension continue U .

Les plaques du condensateur sont carrées, de côté L .

Un faisceau d'électrons est lancé dans le condensateur en un point A, à une vitesse initiale v_0 , parallèlement aux plaques du condensateur (cf. figure).

Les électrons ressortent en un point B, avec une vitesse formant un angle α avec la direction initiale.

Dans toute la suite, on considère la force de pesanteur comme négligeable, comparée à la force électrique.



- Etablir l'expression de l'angle α en fonction des grandeurs données.
- Le condensateur étant chargé, on le débranche du générateur avec des gants isolants et on écarte les plaques, de sorte que la distance entre les plaques devienne le double de la distance initiale.
Que devient alors l'angle α ?

Partie B « Applications des Mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (17 points)

On considère l'équation différentielle $y' = -2x \cdot y^2$ et on note $s(x)$ la solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(0) = 1$.

- a) Estimer la valeur de $s(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec des pas de longueur $h = \frac{1}{3}$.
- b) Déterminer les estimations de $s(2h)$ et $s'(2h)$ en utilisant la méthode d'Euler avec des pas de longueur inconnue h .
- c) En remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$, l'équation peut s'écrire $\frac{dy}{y^2} = -2x \cdot dx$.
 1. Calculer $\int \frac{dy}{y^2}$ en choisissant la solution pour laquelle la constante dans la primitive vaut 0.
 2. Calculer $\int -2x \cdot dx$.
 3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle.
- d) Vérifier (sans avoir forcément résolu l'équation) que $s(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
- e) Il existe une valeur de h , $h > 0$, telle que l'estimation de $s(2h)$ trouvée à la question b) fournit une réponse exacte. Trouver cette valeur de h .

Si l'estimation de $s(2h)$ n'a pas été trouvée, prendre $s(2h) \cong 1 - \frac{1}{2}h^2$ pour traiter cette question.
- f) Trouver une équation différentielle faisant intervenir x , g et g' et qui admet la fonction $g(x) = \frac{2}{x^2 + 2}$ comme solution particulière.

Problème 2 (17 points)

Un (petit) théâtre compte 100 places.

Pour la représentation de samedi prochain un nombre n de billets ont été vendus. La vente de billets est maintenant terminée et seules les personnes ayant acheté un billet peuvent se présenter au théâtre samedi.

On considère que la probabilité qu'une personne ayant un billet se rende effectivement à cette représentation vaut $p = 0.9$.

Soit X la variable aléatoire relative au nombre de personnes qui se rendront au théâtre samedi. Cette variable X suit une loi (distribution) binomiale.

- a) Si $n = 100$, quelle est la probabilité que la salle soit pleine samedi (les 100 places sont occupées) ?
- b) Si $n = 101$, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront au théâtre samedi aient une place ?
- c) Si $n = 103$, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront au théâtre samedi aient une place ?

Pour la suite du problème, **on approxime la loi binomiale par la loi normale**.

- d) Donner, en fonction de n , l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X .
- e) On a vendu 110 billets ($n = 110$). Quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront samedi aient une place ? Donner la réponse avec une précision au centième.
- f) Quel est le nombre de billets vendus si la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront samedi aient une place vaut 95% ?

Problème 3 (6 points)

- a) Décomposer $\frac{7}{11}$ en somme de fractions unitaires toutes différentes (de la forme $\frac{1}{a}$ avec a entier positif) en détaillant les calculs.
- b) Même question, mais aucune des fractions ne doit être égale à $\frac{1}{2}$.