



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2019

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique, les points étant répartis à 2/3 pour Applications des mathématiques et 1/3 pour Physique. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il indique clairement sur chaque feuille son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

- Avant toute application numérique, une solution algébrique et un contrôle des unités sont exigés.
- Les réponses aux problèmes doivent comporter les explications et justifications nécessaires.
- A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.
- Le simple fait de recopier une formule des « formulaires et tables » ne constitue pas une réponse valable et ne donne pas lieu à attribution de points.

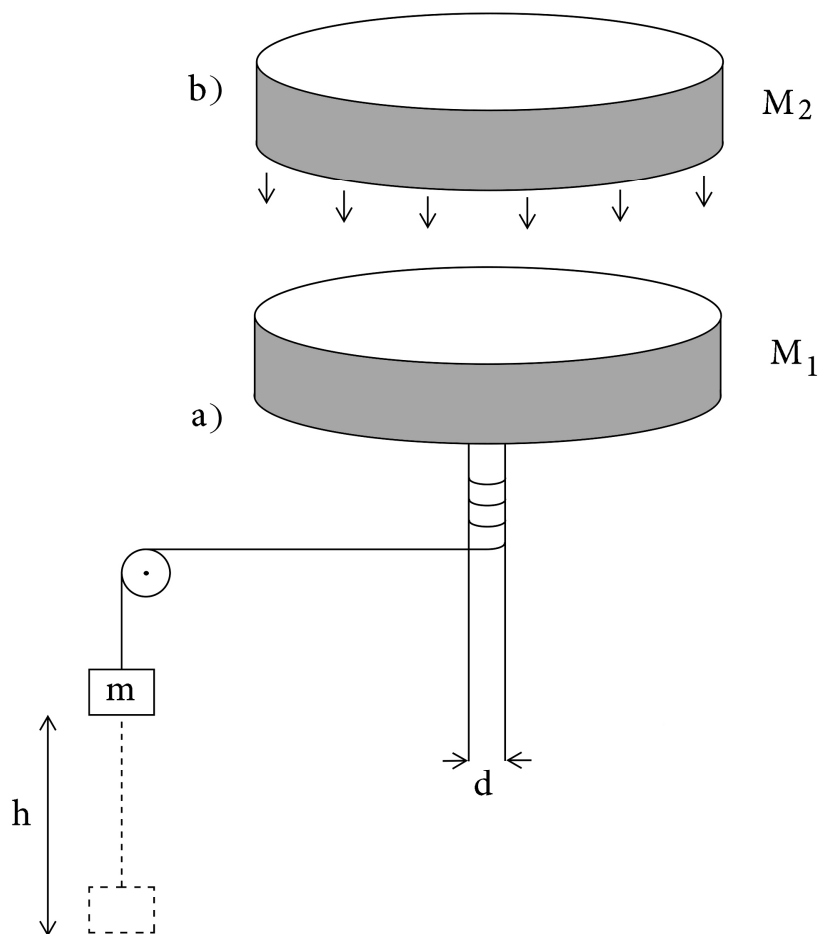
Problème 1 (10 points)

Un cylindre homogène (masse M_1 , rayon R) est monté sur un axe vertical de diamètre d .

Le cylindre, initialement au repos, est accéléré au moyen du dispositif ci-dessous.

On laisse se dérouler le fil inextensible enroulé autour de l'axe jusqu'à ce que la masse m soit descendue d'une hauteur h , puis on coupe le fil.

La masse de l'axe, du fil et de la poulie sont négligeables.



a) Que vaut la vitesse angulaire du cylindre au moment où on coupe le fil ?

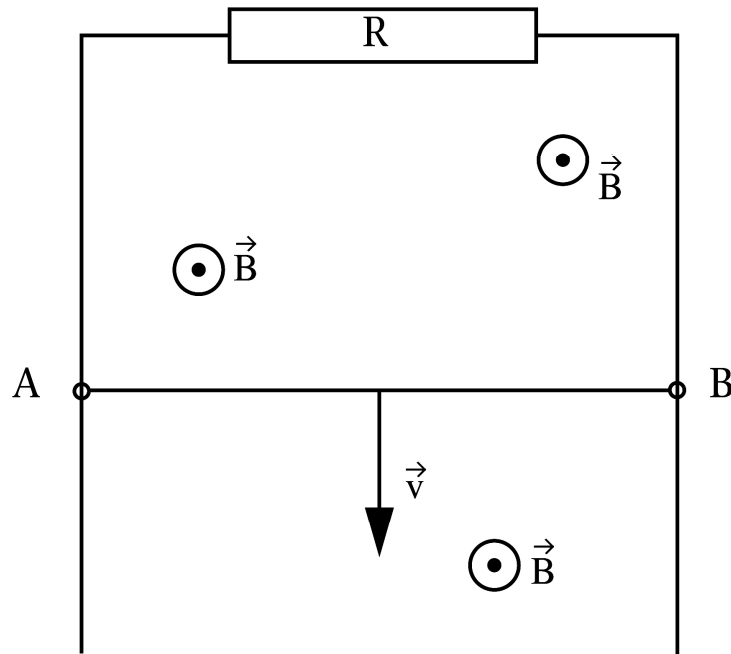
b) On pose un deuxième cylindre homogène (masse M_2 , rayon R) sur le premier.

Ce deuxième cylindre, initialement immobile, est mis en mouvement par frottement sur le premier. On constate qu'au bout d'un temps très bref, les deux cylindres ont la même vitesse de rotation, qui ne vaut plus que le quart de celle du premier cylindre seul.

- Montrez que la masse du deuxième cylindre vaut trois fois celle du premier.
- Calculez le pourcentage d'énergie dissipée sous forme de chaleur lors du frottement.

Problème 2 (10 points)

Une tige conductrice AB (longueur $AB = L$, masse m) tombe sans frottement le long de deux rails parallèles et verticaux entre lesquels règne un champ d'induction magnétique B horizontal et uniforme. Les rails sont reliés à une résistance R . La résistance de la tige AB et celle des rails est négligeable devant R .



- Etablissez les expressions de la tension et du courant induits dans le circuit lorsque la tige descend à une vitesse v . Précisez le sens du courant induit.
- Calculez et représentez la force de Laplace qui agit sur la tige lors de la descente avec une vitesse v .
- Montrez que lorsqu'on lâche la tige sans vitesse initiale, sa vitesse croît jusqu'à une valeur limite v_L dont vous établirez l'expression.
- La tige AB ayant atteint la vitesse-limite v_L , établissez l'expression de la puissance dissipée dans la résistance R en fonction de v_L .

Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (9 points)

On donne la fonction polynômiale $p(x) = 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$. Cette fonction possède 2 zéros négatifs et un zéro positif.

- Expliquer pourquoi le zéro positif de p est compris entre 0 et 2, puis en employant la méthode de la bisection, déterminer ce zéro.
- Établir une équation de la tangente au graphe de p en son point d'abscisse nulle, puis en employant la méthode Newton avec une seule itération et $x = 0$ comme valeur initiale, déterminer une estimation d'un zéro négatif de p .
- Écrire $p(x)$ sous la forme d'un produit de 3 polynômes du premier degré à coefficients entiers.

Problème 2 (21 points)

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = \frac{y}{2x} + 1$ et on appelle s la solution de l'équation dont le graphe passe par le point $P(1; -1)$.

- Par la méthode d'Euler, estimer $s(4)$ avec des pas de longueur 1.
Donner les résultats intermédiaires et le résultat final sous forme de fractions.
- Montrer qu'avec la méthode d'Euler et un pas inconnu h , on obtient les estimations $s'(1+h) \cong \frac{5h+2}{4h+4}$ et $s(1+2h) \cong \frac{7h^2-4}{4h+4}$.
- Déterminer la valeur positive du pas h pour laquelle l'estimation de $s(1+2h)$ vaut 0 et en déduire une estimation d'un zéro de s .
- Déterminer la valeur négative du pas h pour laquelle l'estimation de $s'(1+h)$ vaut 0 et en déduire une estimation des coordonnées d'un point à tangente horizontale du graphe de s .
- Trouver la solution générale de l'équation différentielle.
- Prouver que $s(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
- Déterminer les zéros de s , les coordonnées du point à tangente horizontale du graphe de s , puis représenter ce graphe.

Problème 3 (10 points)

On donne les points $A(0;11)$, $B(6;8)$, $C(8;6)$, $D(12;5)$ et $E(14;0)$.

- En employant la méthode des moindres carrés, déterminer l'équation de la droite de régression qui approche ces points.
- Déterminer le rayon du cercle, centré à l'origine $O(0;0)$, qui minimise la somme des carrés des plus petites distances entre le cercle et les 5 points donnés.

