



Examen suisse de maturité, session d'été 2019

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique, les points étant répartis à 2/3 pour Applications des mathématiques et 1/3 pour Physique. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il indique clairement sur chaque feuille son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

- Avant toute application numérique, une solution algébrique et un contrôle des unités sont exigés.
- Les réponses aux problèmes doivent comporter les explications et justifications nécessaires.
- A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.
- Le simple fait de recopier une formule des « formulaires et tables » ne constitue pas une réponse valable et ne donne pas lieu à attribution de points.

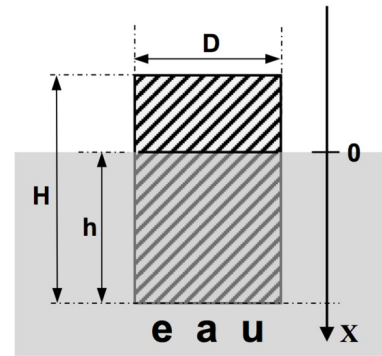
Valeurs numériques :

- Pour l'accélération « g » de la pesanteur terrestre, prendre $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Donnez vos résultats en unités du Système International d'unités, avec 3 chiffres significatifs.

Problème 1. Oscillations-ondes-mouvement harmonique (12 points)

Un cylindre plein, de hauteur H et de diamètre D , a une masse m .

On place ce cylindre dans l'eau : il s'enfonce partiellement d'une hauteur h avant de se stabiliser.



a) 1° Exprimer h en fonction de m , ρ_e et D .

2° Application numérique : $m = 1,8 \text{ kg}$; $D = 12 \text{ cm}$
Calculer h

b) On marque maintenant sur le cylindre un trait horizontal à la hauteur de la surface de l'eau, et on place un axe x orienté vers le bas, avec $x = 0$ à la hauteur de la ligne de flottaison. (voir dessin).

On appuie sur le cylindre jusqu'à ce que sa surface supérieure soit au ras de l'eau.

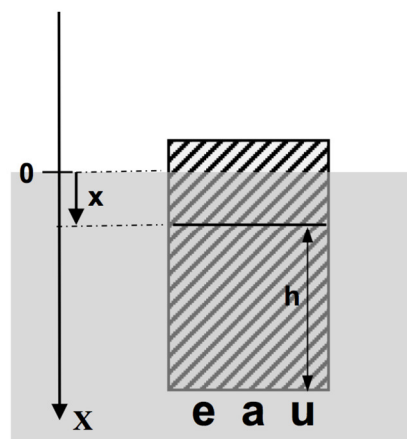
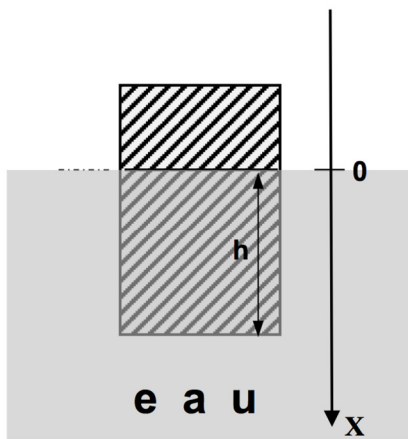
A l'instant $t = 0$, on cesse d'exercer toute force et on laisse le système évoluer librement : il se met à osciller verticalement.

Etablir l'équation différentielle de ce mouvement (qui est un mouvement harmonique).

c) Exprimer algébriquement puis calculer la période de ce mouvement.

d) L'équation horaire de ce mouvement est du type $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, où x est la coordonnée de position en fonction du temps du trait horizontal marqué sur le cylindre au point b) (voir dessin).

Calculer A , ω et φ en sachant que $H = 20 \text{ cm}$.



e) Dans quelle(s) position(s) est le cylindre lorsque sa vitesse est maximale ?

f) Même question pour l'accélération.

Problème 2. Relativité restreinte (8 points)

On considère un vaisseau spatial suffisamment rapide pour atteindre des vitesses proches de celle de la lumière ainsi que des personnes capables, une fois embarquées sur ce vaisseau, de supporter les accélérations nécessaires pour atteindre ces vitesses.

Dans les questions ci-dessous, on ne pourra pas négliger les effets relativistes exposés dans la théorie de la relativité restreinte.

Pour les applications numériques, la masse au repos du vaisseau spatial est de 150 tonnes.

- a) Quel est le travail à accomplir pour accélérer ce vaisseau futuriste, initialement au repos, jusqu'à la vitesse de $0,77c$ par rapport à la Terre ?
- b) Serait-il concevable d'accélérer le vaisseau, initialement au repos, jusqu'à la vitesse c ? Justifiez votre réponse par un calcul algébrique.
- c) Le vaisseau est équipé d'un réacteur qui fournit l'énergie nécessaire pour atteindre des vitesses proches de c .

Quelle masse minimale de combustible doit être théoriquement convertie en énergie pour fournir le travail du point a) ?

(Si vous n'avez pas répondu à la question a), utilisez la valeur de $6 \cdot 10^{21}$ J).

- d) Après avoir été accéléré, le vaisseau spatial voyage en MRU à la vitesse de $0,77c$ par rapport à la Terre.

- d₁) La fréquence cardiaque d'un membre de l'équipage, mesurée avec les instruments à bord, est de 85 pulsations par minute.

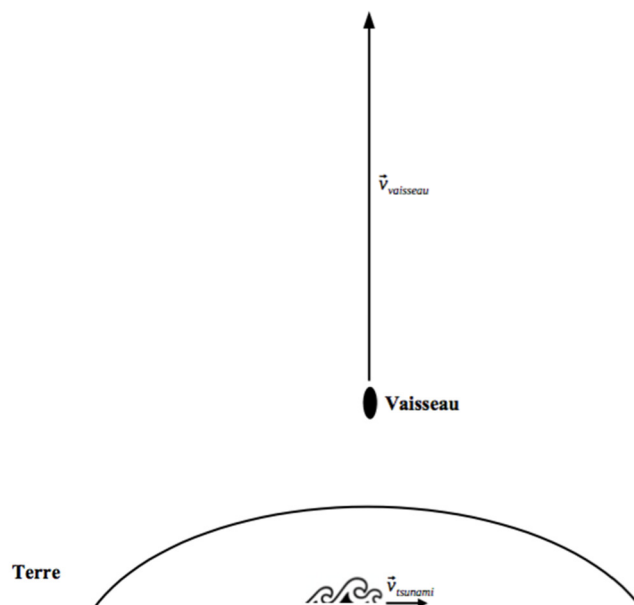
Pour un observateur terrestre, quel est l'intervalle de temps entre deux pulsations et que vaut selon lui la fréquence cardiaque de ce membre de l'équipage ?

- d₂) Dans leurs référentiels respectifs, les observateurs terrestre et du vaisseau comparent leurs règles-étalons, disposées parallèlement à la direction de déplacement du vaisseau. Par quel facteur chaque observateur affirme-t-il que la règle de l'autre est plus courte ?

- d₃) Les instruments de bord du vaisseau mesurent aussi le déplacement d'une vague provoquée sur Terre par un tsunami. La vague se déplace perpendiculairement à la ligne de vol du vaisseau (voir schéma suivant).

On considère ici uniquement la composante de la vitesse du tsunami qui est perpendiculaire à la vitesse du vaisseau.

D'après les instruments de bord, la vague parcourt 300 m en 8 s. Quel est le rapport entre les composantes perpendiculaires de la vitesse mesurées par un observateur terrestre d'une part et celui du vaisseau d'autre part ? Justifier la réponse.



Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (28 points)

Un objet est lâché du sommet d'une tour. Au départ (temps $t = 0$), sa vitesse est nulle. Soumis à la gravité terrestre et freiné par la résistance de l'air, cet objet tombe vers le sol avec une vitesse verticale v qui dépend du temps t .

Dans ce problème, le temps est exprimé en secondes et la vitesse en mètres par seconde (m/s).

- a) En supposant que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse (frottements laminaires), la vitesse v est définie par l'équation différentielle

$$v'(t) = 10 - k \cdot v(t)$$

où k est un coefficient dépendant de la force de frottement.

- a1) En résolvant l'équation différentielle, montrer que $v(t) = \frac{10}{k}(1 - e^{-kt})$.

Les détails de la résolution de l'équation différentielle sont demandés.

- a2) Trouver une approximation, avec une précision de 1 chiffre après la virgule, de la valeur de k , comprise entre 0,1 et 0,5, sachant qu'après deux secondes la vitesse de l'objet est de 16 m/s. Utiliser la méthode de bisection.

Pour les questions a3, a4 et a5, on pose $k = \frac{1}{4}$, donc $v(t) = 40\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)$

- a3) La vitesse de l'objet sera toujours inférieure à une valeur appelée vitesse limite. Donner cette vitesse limite.
- a4) Esquisser le graphe de v pour les 10 premières secondes de chute.
- a5) Déterminer la fonction $x(t)$ définissant la distance parcourue par l'objet en fonction du temps t sachant que $x'(t) = v(t)$ et $x(0) = 0$.

L'objet touche le sol après 10 secondes. Quelle est la hauteur de la tour ?

- b) En supposant que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse (frottements turbulents), la vitesse v est définie par l'équation différentielle

$$v'(t) = 10 - k \cdot v^2(t)$$

où k est un coefficient dépendant de la force de frottement. On prendra ici $k = \frac{1}{200}$, donc

$$v'(t) = 10 - \frac{1}{200} \cdot v^2(t)$$

- b1) Donner la vitesse limite.

- b2) En appliquant la méthode d'Euler avec un pas temporel de $\frac{1}{2}$, déterminer une approximation de la vitesse de l'objet après 1 seconde de chute.

Problème 2 (12 points)

Un test a permis de construire le tableau ci-dessous qui présente la distance de freinage d (en mètres) d'un véhicule sur route sèche en fonction de sa vitesse v (en kilomètres par heure).

v	20	40	60	80
d	8	20	36	64

- a) Dessiner le nuage de quatre points relatif à ces deux séries de données et constater que la courbe obtenue en reliant les points ressemble plus à une parabole qu'à une droite.
- b) Effectuer le changement de variable $z = \frac{d}{v}$, puis déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre v et z . Lors des calculs, arrondir tous les résultats au millième le plus proche.
- c) Déterminer l'équation de la droite de régression de z en v , de la forme $z = a \cdot v + b$.
- d) En déduire une fonction polynomiale du deuxième degré donnant d en fonction de v , puis estimer la distance de freinage pour un véhicule circulant à 100 km/h.

Si l'équation de la droite de régression n'a pas été trouvée à la question précédente, prendre $z = 0.0055v + 0.35$ pour répondre à cette dernière question.