



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2017

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique, les points étant répartis à 2/3 pour Applications des mathématiques et 1/3 pour Physique. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Consignes particulières pour la partie A : PHYSIQUE

- Avant toute application numérique, une solution algébrique et un contrôle des unités sont exigés.
- Les réponses aux problèmes doivent comporter les explications et justifications nécessaires.
- A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être **établies**.
- Le simple fait de recopier une formule des « formulaires et tables » ne constitue pas une réponse valable et ne donne pas lieu à une attribution de points.
- Chaque fois que nécessaire, prendre pour "g" la valeur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Partie A : PHYSIQUE/ 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES/ 40 points

Total/ 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

Problème 1 (12 points)

On négligera les frottements dans tout le problème.

Les questions **a)**, **b)**, **c)** et en partie **d)** peuvent être résolues indépendamment les unes des autres.

Un chariot de masse $M = 180$ grammes est lié à un ressort. On appuie un deuxième chariot de masse identique contre le premier chariot : cela comprime le ressort sur une distance Δx .

Au temps $t = 0$, on lâche soudain le tout : $\Delta t = 80$ ms plus tard, lorsque le premier chariot commence à ralentir, il perd le contact avec le deuxième, qui poursuit librement son mouvement sur la surface horizontale.

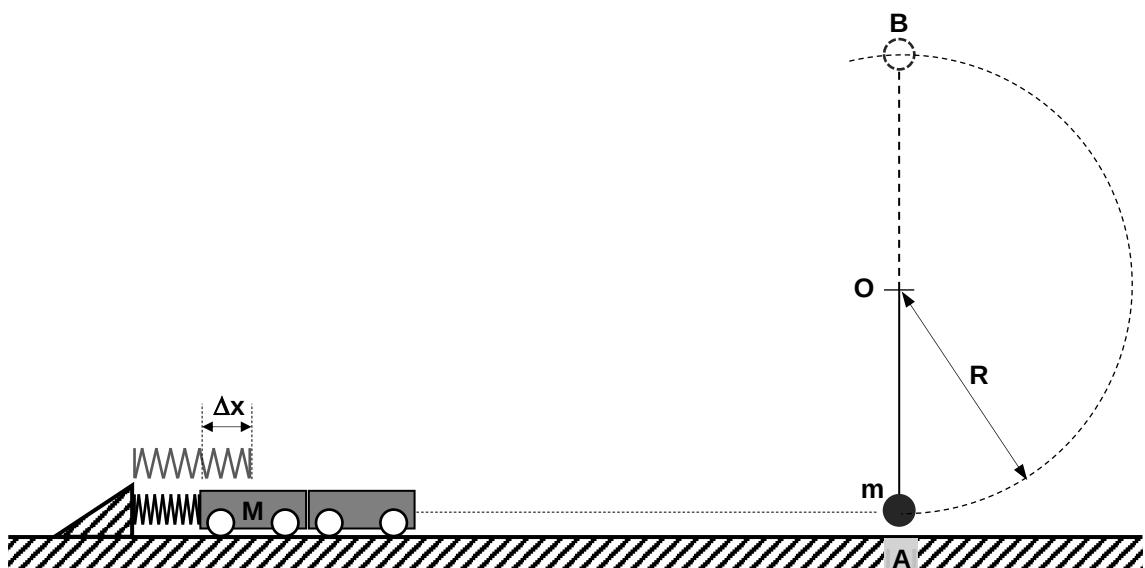
- a)** Exprimer (en fonction de la distance Δx de compression du ressort et de la durée Δt du contact) la vitesse v_1 acquise par le chariot de droite lorsqu'il perd le contact avec celui de gauche.

Le chariot de droite continue sa route et va heurter une bille (considérée comme ponctuelle) de masse $m = 60$ grammes, immobile au point **A**. Le choc est élastique.

- b)** Exprimer (en fonction de M , m et v_1) la vitesse v'_2 acquise par la bille m juste après le choc.

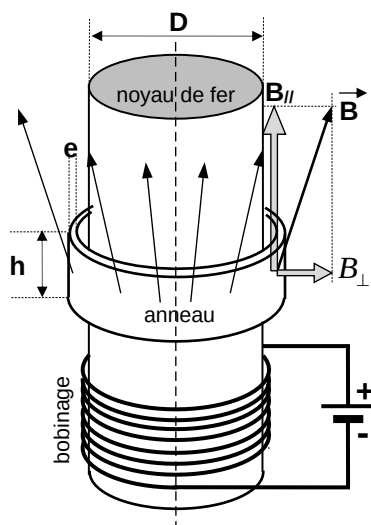
La bille est fixée à un fil de masse négligeable, de longueur $R = 40,0$ cm, lui-même attaché en **O**, à la verticale de **A**.

- c)** Exprimer (en fonction de R et g) la vitesse minimale v_3 de la bille m au sommet **B** si elle a parcouru le demi-cercle **AB**, ficelle tendue.
- d)** Exprimer (en fonction de R et g) la vitesse minimale v'_2 pour que la bille parvienne en **B**. Calculer cette valeur minimale de v'_2 .



Problème 2 (8 points)

L'anneau de Thomson



Un cylindre vertical en fer (= noyau) de diamètre $D = 6 \text{ cm}$ est entouré d'un bobinage qui crée un champ $\vec{B}$.

Dans le noyau de fer, $\vec{B}$ est parallèle à l'axe du cylindre ($B_{||}$), mais à l'extérieur (= à travers la paroi de l'anneau), il a aussi une composante radiale ($B_{\perp}$).

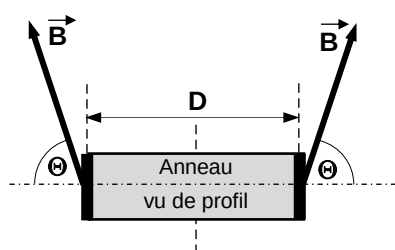
$\vec{B}$ n'est pas stationnaire : $B_{||}(t) = k_1 \cdot t$, avec $k_1 = 5 \text{ Tesla/s}$, et
 $B_{\perp}(t) = k_2 \cdot t$, avec $k_2 = 0,1 \text{ Tesla/s}$.

On admet que ces expressions sont valables sur toute la hauteur du noyau de fer.

Un anneau en aluminium peut glisser sans frottement le long du noyau. La résistance électrique de cet anneau vaut $R = 5 \cdot 10^{-4} \Omega$.

On peut admettre que

- l'espace entre le cylindre et l'anneau, et
- l'épaisseur e de l'anneau sont négligeables.



- Quelle force (donner le nom) l'anneau subit-il alors de la part de $\vec{B}$? Pour l'orientation de la force, procéder en deux temps :
- Envisager d'abord (comme sur le dessin ci-contre) deux petits morceaux de l'anneau et dessiner (longueur quelconque, orientation correcte) la force que chacun subit, puis
- Considérer l'ensemble de l'anneau et déterminer l'orientation de la résultante des forces qui s'exercent sur tous les morceaux.
- Dessiner cette résultante (longueur quelconque, orientation correcte).
- Exprimer cette résultante en fonction de k_1 , k_2 , D , R , t .
- Calculer cette résultante au temps $t = 0,2 \text{ s}$.

Partie « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (22 points)

Le graphe de la solution s de l'équation différentielle

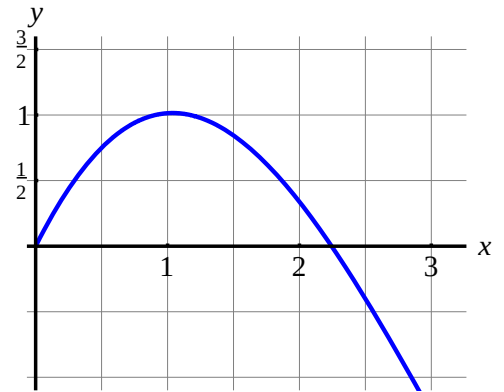
$$y' = 2 \cos(x) - y$$

qui satisfait à la condition initiale

$$s(0) = 0$$

est donné ci-contre pour $x \in [0; 3]$.

Remarque : x est en radians.



- Estimer la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$ à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. Arrondir tous les résultats au centième.
- En employant les résultats obtenus ci-dessus, expliquer pourquoi on peut supposer que le graphe de s admet un maximum d'abscisse inférieure à 1.
- On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu. On note e l'estimation de s' obtenue avec un seul pas.
 - Montrer que $e(h) = 2 \cos(h) - 2h$.

Pour une valeur de h voisine de 1, on a $e(h) = 0$.
 - Estimer, en utilisant une fois la méthode de Newton, la valeur h_0 telle que $e(h_0) = 0$.
 - Cette valeur diffère de celle attendue, pourquoi ?
 - Déterminer encore, avec la méthode d'Euler, une estimation de $s(2h)$ (en fonction de h).
- Déterminer la solution générale de cette équation différentielle, puis vérifier que la fonction $s(x) = \cos(x) + \sin(x) - e^{-x}$ est la solution particulière dont le graphe passe par l'origine (0;0).
- Déterminer au dixième près le zéro strictement positif de cette solution, en utilisant la méthode de la bisection.

Problème 2 (18 points)

On considère la fonction $f(x) = (x+1) \cdot \sin(2\pi x)$ avec $x \in [0;1]$.

On donne également la première et la seconde dérivée de f , $f'(x) = 2\pi(x+1)\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)$ et $f''(x) = 4\pi\cos(2\pi x) - 4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x)$

a) Copier et compléter le tableau ci-dessous sur la feuille de réponses.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$					
$f'(x)$					

b) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé (pour $x \in [0;1]$), en prenant une unité égale à 4 carreaux.

c) On cherche l'abscisse du maximum de cette fonction. Pour la trouver, employer la méthode de Newton avec une valeur initiale bien choisie, et déterminer une valeur de x pour laquelle $|f'(x)| < \frac{1}{20}$. Arrêter le processus après 2 itérations au maximum, même si la condition $|f'(x)| < \frac{1}{20}$ n'est pas satisfaite.

On aimerait approcher au mieux, au sens des moindres carrés, certains points du graphe de f dont les ordonnées ont été calculées à la question a).

d) En employant la méthode des moindres carrés, déterminer l'équation de la droite de régression d'équation $y = ax + b$ qui approche les 3 points ci-dessous :

$$P_1\left(\frac{1}{4}; f\left(\frac{1}{4}\right)\right), P_2\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \text{ et } P_3\left(\frac{3}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right)\right).$$

e) On peut approcher les 5 points de la question a) si on prend le graphe de la fonction $g(x) = a \cdot \sin(2\pi x)$, où a est une constante réelle.

Déterminer la valeur de a qui minimise la somme des carrés des cinq distances verticales entre le graphe de g et ces points.