



Examen suisse de maturité, session d'été 2017

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en une heure pour la partie Physique et en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques. Les points étant répartis à 1/3 pour Physique et à 2/3 pour Applications des mathématiques. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « Physique »

Durée indicative : 60 minutes

Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.

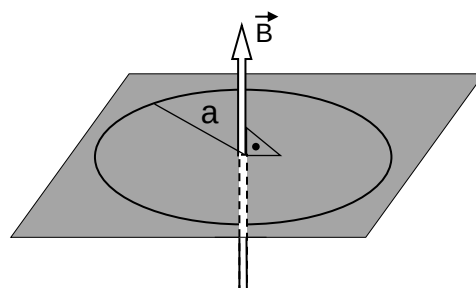
A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.

Problème 1 (6 points)

Une boucle de fil conducteur, circulaire, de rayon a , est placée dans une zone (en grisé) où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la boucle (voir schéma), mais variable dans le temps.

L'intensité du champ est de la forme

$$B(t) = -b \cdot t + B_0$$



où b et B_0 sont des constantes positives.

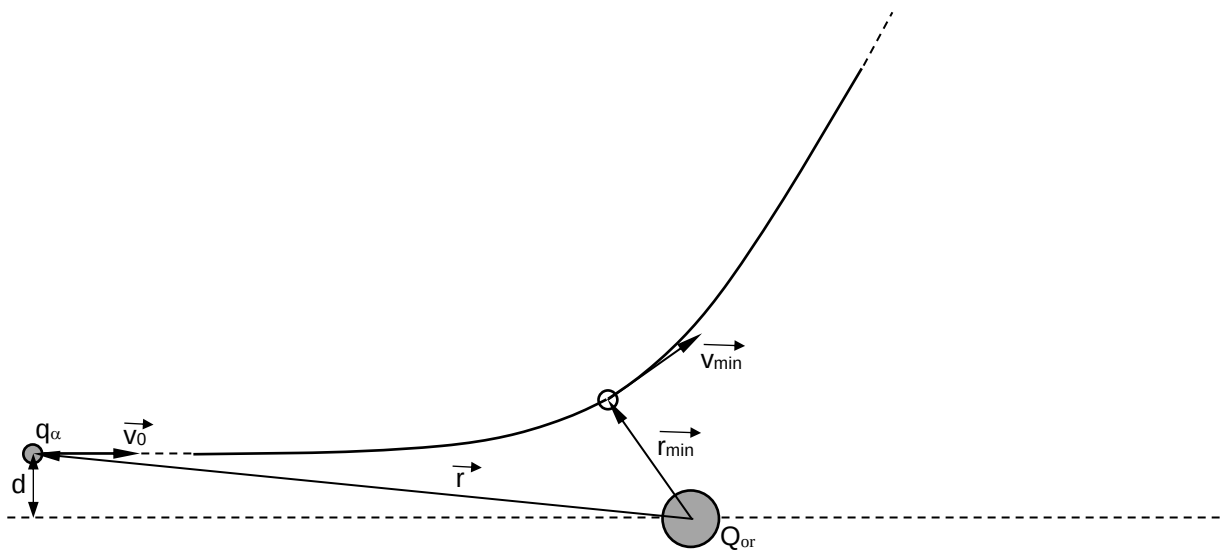
- Donner l'expression littérale du flux magnétique au travers de la boucle au temps t ,
- Donner l'expression littérale de la tension induite U_{ind} ,
- Donner l'expression littérale du courant induit I_{ind} si la résistance de la boucle est R ,
- Indiquer dans quel sens (vu depuis dessus) tourne le courant induit,
- Donner l'expression littérale de la puissance P dissipée par la résistance de la boucle.
- Avec : $b = 0,1 \frac{T}{s}$, $B_0 = 0,4 T$, $a = 69 \text{ cm}$, $R = 0,2 \Omega$
Calculer : U_{ind} , I_{ind} et P .

Problème 2 (14 points)

En 1923, E. Rutherford a fait une expérience qui est à l'origine de notre conception actuelle de l'atome : elle consiste à envoyer des particules α (= noyaux d'hélium) sur une très fine feuille d'or. Les particules α sont alors diffusées (= déviées) par les noyaux des atomes d'or.

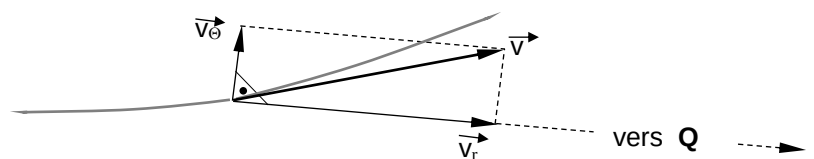
Une particule α (ponctuelle) chargée d'une quantité q est animée d'une vitesse $\mathbf{v}_0$ et se dirige selon le schéma ci-dessous vers une charge Q (ponctuelle également) considérée comme fixe pour tout le problème.

- Sachant que q est un noyau d'hélium, calculer sa charge (réponse en coulombs, abrégé C). Calculer aussi la masse de la particule α .
- Sachant que Q est un noyau d'or, calculer sa charge (réponse en coulombs, abrégé C).
- En fixant la valeur de l'énergie potentielle ($\mathcal{E}_{\text{pot}}$) comme nulle « très loin » de Q , exprimer littéralement (en fonction de q , Q , et de r (voir dessin)) l'énergie potentielle de la charge q de la particule α par rapport à la charge Q du noyau d'or.



N.B : En cas de non-réponse aux questions **a)** et/ou **b)** ci-dessus, prendre comme valeurs pour la suite du problème : $m_\alpha = 5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $q = 3 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $Q = 1,00 \cdot 10^{-17} \text{ C}$.

- Appelons $\mathbf{v}_0$ la vitesse de la particule α "très loin" de Q et $\mathcal{E}$ son énergie totale. Application numérique : $\mathcal{E} = 5,3 \text{ MeV}$ et $d = 4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$. Calculer la vitesse $\mathbf{v}_0$ et le moment cinétique $\mathbf{L}$ de la particule α lorsqu'elle est « très loin » de Q .
- La vitesse (et par conséquent l'énergie cinétique) de la particule α n'est pas conservée, mais une grandeur physique (autre que l'énergie) est, elle, conservée ; laquelle ?
- En décomposant la vitesse comme indiqué sur le dessin ci-dessous et en utilisant la réponse **e)**, calculer r_{min} et $\mathbf{v}_{\text{min}}$ de la particule α . (c'est-à-dire au point d'approche maximale de Q).



Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (20 points)

Une banque centrale **prélève** un intérêt annuel de 0.75% sur les sommes d'argent qu'on lui confie. Plus précisément, le taux d'intérêt annuel est négatif et vaut -0.75% .

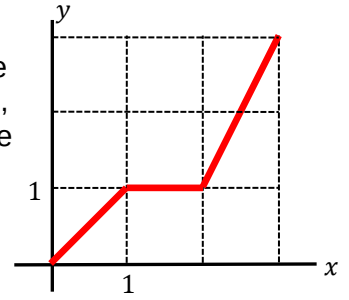
Répondre aux questions suivantes en arrondissant toutes les sommes d'argent au franc le plus proche.

- a) Une assurance place 1 million de francs. De quel capital disposera-t-elle dans 5 ans ?
- b) Après combien d'années un capital placé dans cette banque aura-il perdu 10% de sa valeur initiale ?
- c) Une assurance souhaite disposer de 10 millions de francs dans une année.
 - 1. Quel montant doit-elle verser aujourd'hui si elle effectue un versement unique ?
 - 2. Quel doit-être le montant de chaque versement, si elle effectue 12 versements mensuels, au début de chaque mois, à la banque centrale ?
- d) Une caisse de pension dispose de 2 millions de francs qu'elle doit placer pendant 3 ans. Elle place 1 million à la banque centrale et l'autre million dans des actions. Quel rendement annuel (taux d'intérêt) doit-elle percevoir sur les actions, si dans 3 ans elle souhaite disposer encore de 2 millions de francs.
- e) Une assurance a placé une certaine somme dans la banque le 1^{er} janvier 2017. On suppose que dès le 31 décembre 2017 le taux d'intérêt commencera d'augmenter et qu'il augmentera alors d'un quart de pourcent à la fin de chaque année. Ainsi, le 31 décembre 2017 le taux d'intérêt passera à -0.5% .
Après combien d'années (à partir du 1^{er} janvier 2017) l'assurance pourra-t-elle récupérer 99.99 % de son placement ?

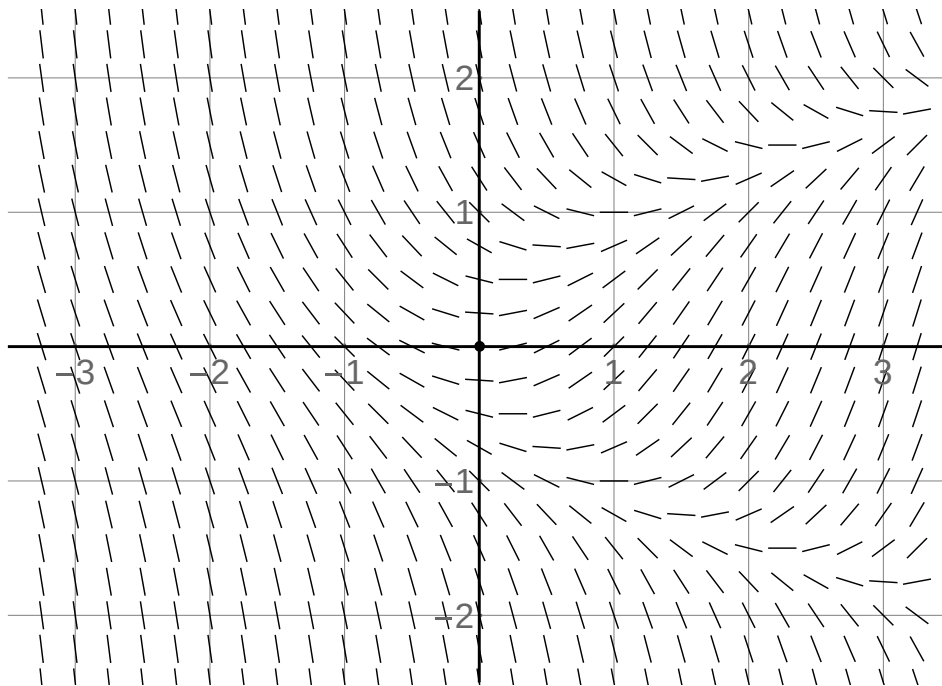
Problème 2 (20 points)

Les quatre questions ci-dessous concernent des équations différentielles, mais sont indépendantes les unes des autres.

- a) Le graphe de la solution s satisfaisant la condition initiale $s(0) = 0$ de l'équation différentielle $y' = ax + by + c$ est approché, pour $x \in [0; 3]$, par la ligne brisée dessinée ci-contre, obtenue en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = 1$.
Déterminer les valeurs de a , b et c .



- b) Pour quelle valeur de a et b la fonction $s(x) = e^{2x} + ax + b$ est-elle une solution particulière de l'équation différentielle $y' = 2y - 2x - 1$?
- c) En utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{4}$, estimer la valeur du nombre e par une fraction, sachant que $s(x) = e^x$ est la solution particulière de l'équation différentielle $y' = y$ satisfaisant la condition initiale $s(0) = 1$.
- d) À laquelle des 11 équations différentielles ci-dessous correspond le champ de directions dessiné ci-dessous. Cocher l'unique bonne réponse.



- ☐ $y' = x + y$
- ☐ $y' = x - y$
- ☐ $y' = x + y^2$
- ☐ $y' = x^2 + y$
- ☐ $y' = x^2 + y^2$
- ☐ $y' = x - y^2$
- ☐ $y' = y^2 - x$
- ☐ $y' = x^2 - y$
- ☐ $y' = y - x^2$
- ☐ $y' = x^2 - y^2$
- ☐ $y' = y^2 - x^2$

Tracer encore, dans le champ de directions ci-dessus, le graphe de la solution qui passe par l'origine.