



Examen suisse de maturité, session d'été 2016

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique. Les points étant répartis à 2/3 pour Applications des mathématiques et 1/3 pour Physique. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

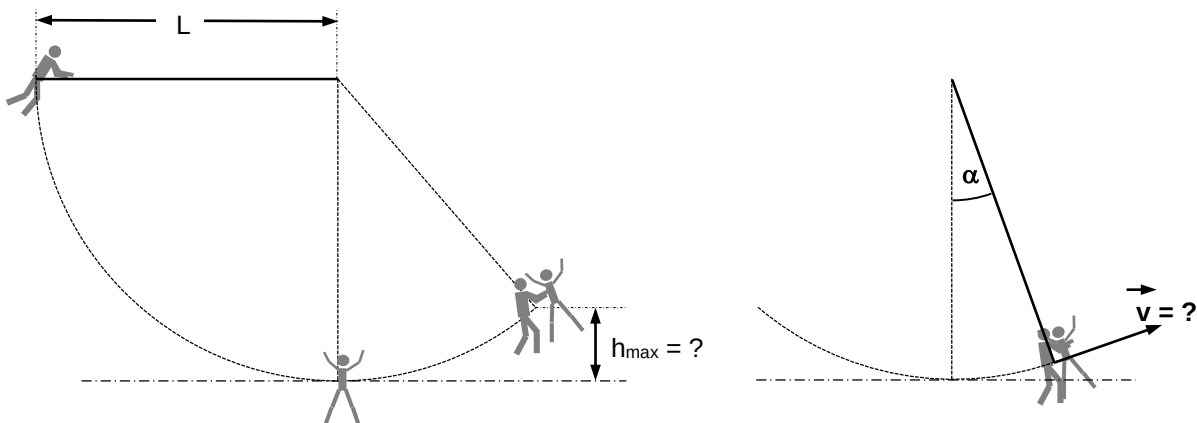
Durée indicative : 60 minutes

Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.

A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.

Problème 1 (10 points)

- a) Tarzan ($m_T = 80 \text{ kg}$), se balance au bout d'une liane de longueur $L = 3 \text{ m}$ qui est horizontale au départ. Au point le plus bas de sa trajectoire, il attrape Jane ($m_J = 60 \text{ kg}$). Quelle est la hauteur maximale $h_{\max}$ que peuvent atteindre les deux amoureux en remontant ?
- b) Après quelques balancements, ils décident de lâcher la liane lorsque celle-ci fait un angle de $\alpha = 20^\circ$ par rapport à la verticale. Quelle est alors leur vitesse v en quittant la liane ? On néglige les frottements. En cas de non-réponse à la question a), prendre $h_{\max} = 1,2 \text{ m}$.



Problème 2 (10 points) Charge d'un condensateur

- a) Faire le schéma d'un circuit comprenant un générateur de tension continue U_0 , un interrupteur, un condensateur de capacité C et une résistance de valeur R en série.
- b) En utilisant comme point de départ la deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles), établir l'équation différentielle qui permet de déterminer la charge en fonction du temps $q(t)$ portées par les plaques du condensateur.
- c) Résoudre complètement cette équation différentielle et vérifier que

$$q(t) = Q \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

est solution de cette équation différentielle, Q étant la valeur maximale de la charge portée par les plaques du condensateur.

- d) Obtenir à partir du résultat du point c) l'expression $I(t)$ du courant circulant dans le circuit.

APPLICATION NUMÉRIQUE :

Avec $U_0 = 4$ [V], $C = 6.5$ [μ F] et $R = 3$ [M Ω]

- e) Combien de temps faut-il attendre pour que la charge devienne égale à 75 % de sa valeur finale Q ?

Partie B « APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (19 points)

On donne l'équation différentielle $y' = \frac{y}{x} - 2$. Le graphe de la solution particulière s qui passe par le point $P(1;3)$ ($s(1) = 3$) possède un seul point à tangente horizontale, H .

- En partant du point $P(1;3)$, employer la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{2}$ pour déterminer une approximation d'un point Q du graphe de s en lequel la pente de la tangente est négative. Présenter les calculs de manière détaillée et donner toutes les réponses sous forme de fractions.
- Déterminer la solution générale de l'équation différentielle puis montrer que $s(x) = 3x - 2x \cdot \ln(x)$.
- Déterminer les coordonnées exactes du point H .
- Déterminer le zéro de la fonction s , donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} (s(x))$, puis tracer le graphe de s pour $x \in]0;6]$.

Problème 2 (16 points)

Ce problème de mathématiques financières est constitué de deux parties indépendantes les unes des autres.

Partie A

Une personne place 100 francs à la banque chaque premier du mois, à partir du 1^{er} janvier 2016. Le taux d'intérêt **annuel** ne varie pas et il s'élève à 1,2%. On suppose de plus que la banque ne facture aucun frais.

- De quelle somme disposera cette personne le 31 décembre 2023 ?
- À partir de quelle date, au mois près, pourra-elle disposer de 20'000 francs au minimum ?

Partie B

Une personne place 1000 francs à la banque au début de chaque année. À la fin de la 10^{ème} année, elle dispose de 12'000 francs. Quel est le taux d'intérêt annuel, proche de 3%, appliqué à ce placement ?

Indication : Trouver une équation polynomiale dont la solution est $(1 + \text{le taux cherché})$, puis utiliser la méthode de Newton une seule fois pour estimer ce taux.

Problème 3 (5 points)

Décomposer $\frac{13}{14}$ en somme de fractions unitaires toutes différentes (de la forme $\frac{1}{a}$ avec a entier) en détaillant les calculs.