



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2013

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique, les points étant répartis à environ 2/3 pour Applications des mathématiques et 1/3 pour Physique. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.

A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.

Par souci de lisibilité, les unités des différentes grandeurs intervenant dans les énoncés sont placées entre crochets.

Problème 1. (10 pts)

Deux masses, $m_1 = 1,00$ [kg] et $m_2 = 4,00$ [kg], sont reliées à l'aide d'un fil et sont suspendues de chaque côté d'un disque de rayon $R = 20,0$ [cm] et de moment d'inertie

$I_G = 0,500$ [kg·m²].

Les masses sont initialement immobiles et placées à la même hauteur (voir figure ci-contre).

On néglige la masse du fil et on admet que ce dernier est inextensible.

Dans un 1^{er} temps, nous considérons que le fil glisse sans frottement sur le disque immobile.

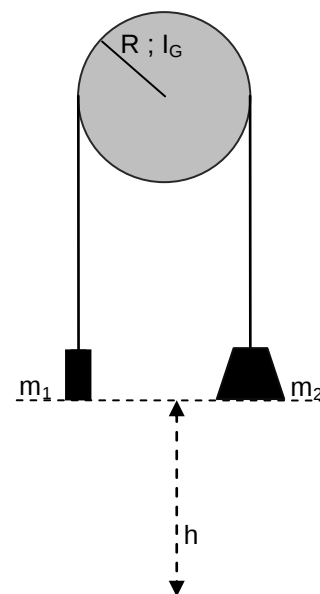
a) Déterminer l'accélération de la masse m_2 .

Dans un 2^e temps, nous considérons que le fil fait tourner le disque sans glissement.

b) Même question qu'en a).

(Cette question est indépendante de a).)

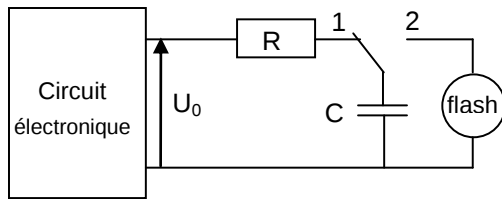
c) Quelle est la vitesse angulaire (ω) du disque lorsque la masse m_2 est descendue d'une hauteur $h = 1,00$ [m] à partir du repos ?



N.B. : Il est possible, mais pas nécessaire, d'utiliser le résultat b) pour répondre à la question c)

Problème 2. (10 pts)

Flash d'appareil photo



Dans le flash d'un appareil photo, un circuit électronique permet d'élever la tension électrique fournie par la batterie pour charger à travers une résistance $R = 100 \text{ [k}\Omega\text{]}$, un condensateur de capacité $C = 150 \text{ [}\mu\text{F]}$ sous une tension de $U_0 = 300 \text{ [V]}$. (Interrupteur sur 1).

N.B. : Les questions a), b), c) et d) peuvent être résolues indépendamment les unes des autres.

Interrupteur sur 1 :

- a) **Etablir** l'équation différentielle qui régit l'évolution du courant $I(t)$ au cours de cette charge, dont la solution est donnée par $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ et où les grandeurs I_0 et τ sont à déterminer algébriquement.
- b) Donner (avec une brève justification) l'expression algébrique de la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur.
- c) Tracer l'allure des courbes $I(t)$ et $U_C(t)$, en précisant les valeurs initiales et finales de I et de U .

Interrupteur sur 2 :

- d) Calculer l'énergie électrique $\mathcal{E}_{\text{el}}$ stockée dans ce condensateur lorsqu'il est chargé.
*La décharge rapide dans la lampe à éclats provoque un éclair d'une durée de 1,5 milliseconde.
(La lampe est considérée comme une résistance R')*
- e) Dédire la valeur de la puissance électrique P_{el} , moyenne, (considérée comme constante) consommée durant cet éclair.
- f) Donner (sans démonstration) les expressions (algébriques, sans valeurs numériques) du courant $I(t)$ et de la tension $U_C(t)$ au cours de la décharge.

Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 3 (10 points)

On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{y}$ avec la condition initiale $y(0) = 5$.

- a) En employant la méthode d'Euler avec un pas égal à $\frac{1}{2}$ calculer une estimation de $y(3)$. Donner tous les résultats intermédiaires en les arrondissant à deux décimales.
- b) Prouver que pour les valeurs positives de y , le graphe de la solution est un arc de cercle centré à l'origine.
- c) En déduire la valeur exacte de $y(3)$.

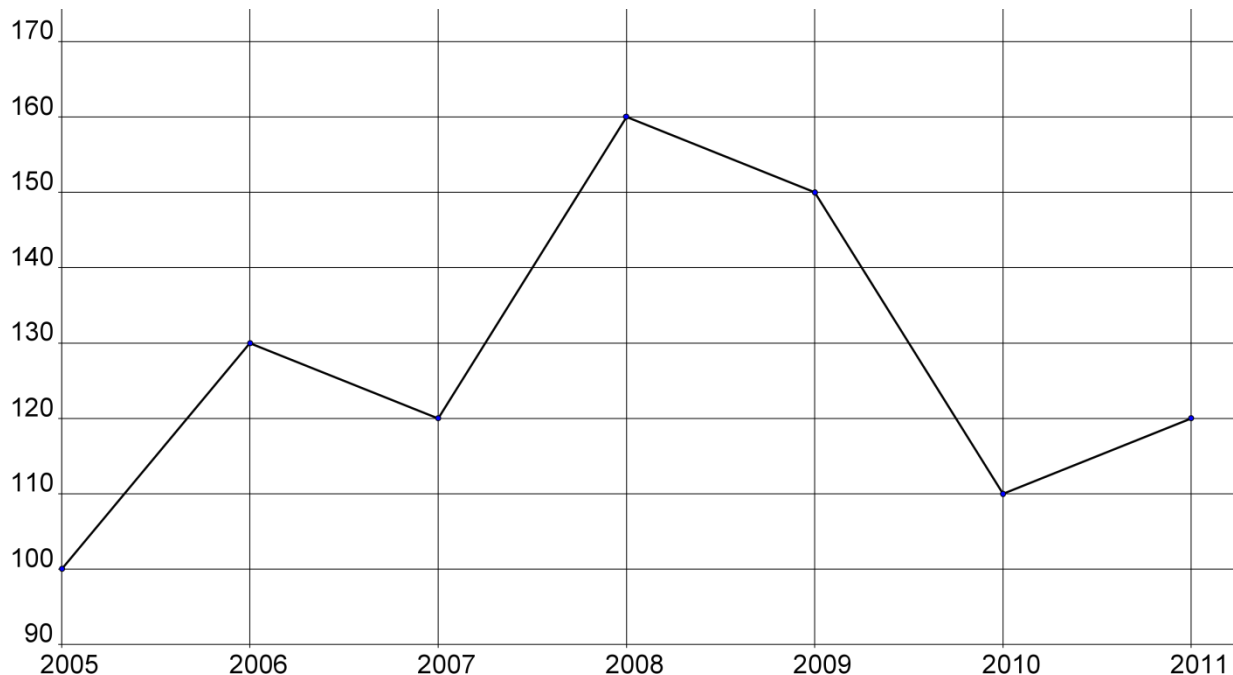
Problème 4 (10 points)

On considère l'équation différentielle : $x^2 \cdot y' + x \cdot y = 1$.

- a) Déterminer la solution générale de l'équation.
- b) On appelle f la solution particulière qui possède un extremum d'abscisse égale à 1. Calculer l'ordonnée de cet extremum, c'est-à-dire $f(1)$.

Problème 5 (20 points)

Durant six ans, on a relevé le cours d'une action, chaque année au 1^{er} janvier, donc à sept reprises. Ces résultats sont représentés par le graphique ci-dessous. On y voit par exemple, que le 1^{er} janvier 2005, l'action valait 100 francs.



- a) Une personne a acheté dix actions le 1^{er} janvier 2005 et les a revendues le 1^{er} janvier 2011. Une autre personne a placé 1'000.- sur un compte bancaire le 1^{er} janvier 2005, elle a retiré la somme placée, avec les intérêts, le 1^{er} janvier 2011 et elle a obtenu la même somme que la première personne. Quel est le taux d'intérêt unique appliqué durant ces 6 années sur son compte ?
- b) Le taux de rendement annuel de cette action est le pourcentage d'augmentation ou de diminution de cette action d'une année à l'autre. Pour l'année 2005, par exemple, ce taux a été de 30% alors que pour l'année 2006 il a été de $-7,69\%$ (arrondi au centième). Calculer la moyenne m et l'écart type s des 6 taux de rendement annuel des années 2005 à 2010. On donnera les taux en pourcent, arrondis au centième.

Si les réponses de la question b) n'ont pas été trouvées, on prendra pour la suite du problème $m = 5.36\%$ et $s = 21.46\%$.

- c) Pour simuler l'évolution du cours de l'action dans le futur, on suppose que pour les années suivantes, le taux de rendement annuel sera compris entre $m - s$ et $m + s$. Déterminer alors l'estimation la plus optimiste et l'estimation la plus pessimiste pour le cours de l'action au 1^{er} janvier 2013.
- d) Estimer le cours de cette action au 1^{er} janvier 2013, en supposant qu'en 2011 et 2012 son taux de rendement annuel sera égal à m , la moyenne des taux de rendement calculée à la question b).
- e) Estimer le cours de cette action au 1^{er} janvier 2013 à l'aide d'une régression linéaire, donc en trouvant l'équation de la droite qui, au sens des moindres carrés, approche au mieux le cours de cette action. Pour simplifier les calculs sans changer le résultat final, numéroté les années de 5 à 11 au lieu de 2005 à 2011.