



Examen suisse de maturité, session d'été 2013

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique, les points étant répartis de la manière suivante : 2/3 pour Applications des mathématiques et 1/3 pour Physique.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente **sur un feuillet les problèmes de Physique** et **sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques**. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Problème 1 / 10 points

Problème 2 / 10 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Problème 3 / 16 points

Problème 4 / 12 points

Problème 5 / 12 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

Durée indicative : 60 minutes

Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.

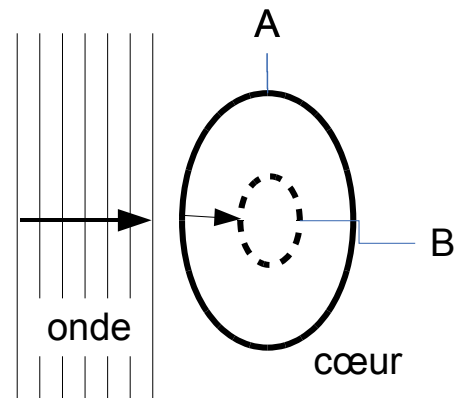
A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.

Par souci de lisibilité, les unités des différentes grandeurs intervenant dans les énoncés sont placées entre crochets.

Problème 1. (10 pts)

On mesure la vitesse de déplacement de la paroi du cœur d'un fœtus à l'aide d'ultrasons pulsés de fréquence égale à 2,3 [Mhz]. On observe un battement de 500 [Hz]. En supposant que la mesure ait lieu lors de la contraction du cœur (de A à B) et que la vitesse des ultrasons dans les tissus vaut $1,5 \cdot 10^3$ [m/s],

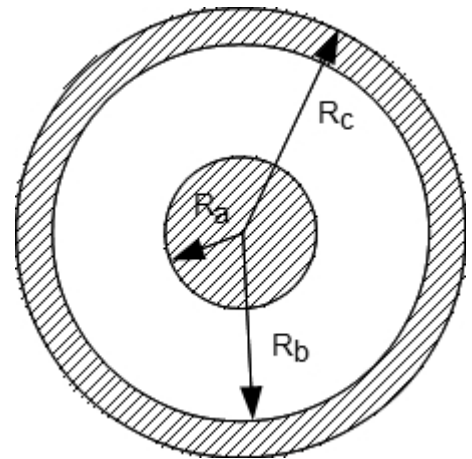
1. Expliquer pourquoi on observe un battement et non une interférence,
2. Calculer la fréquence de l'onde réfléchie par la paroi du cœur,
3. Calculer la vitesse maximale de la paroi du cœur qui bat.



Problème 2. (10 pts)

On considère une sphère métallique de rayon R_a qui porte une charge électrique $+q$. On l'entoure d'une autre sphère métallique creuse (de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur R_c). Cette seconde sphère, concentrique à la première, est neutre.

1. Donnez l'expression de la norme du champ électrique $\vec{E}(r)$, en fonction de la distance r au centre du système, dans les régions :
 - a. $r < R_a$
 - b. $R_a \leq r \leq R_b$
 - c. $R_b < r < R_c$
 - d. $r \geq R_c$
2. Donnez l'expression du potentiel électrique $V(r)$, en fonction de la distance r au centre du système, dans les régions :
 - a. $r \geq R_c$
 - b. $R_b < r < R_c$
3. Tracer l'allure du graphique de $V(r)$ pour $0 \leq r \leq 2R_c$



Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 3. (16 points)

On aimerait calculer des estimations du nombre $\ln(2)$ en employant différents algorithmes.

- a) Esquisser le graphe de la fonction $f(x) = e^x - 2$, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$ en employant la méthode de la bisection. On arrêtera les calculs dès qu'on aura trouvé un intervalle de longueur inférieure ou égale à $\frac{1}{100}$ et contenant la solution.
- b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en employant cette fois la méthode de Newton et en prenant comme valeur initiale $x_0 = 3$. Noter les termes successifs de la suite de Newton jusqu'à ce que cette suite soit constante lorsqu'on travaille avec 3 chiffres significatifs, c'est-à-dire avec des résultats arrondis au millième.
- c) Observer que la fonction $y = \ln(x)$ est la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ satisfaisant la condition initiale $y(1) = 0$, puis calculer une estimation de $y(2)$ en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. On arrondira à nouveau les résultats au millième.
- d) Prouver que $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot dx$, puis estimer cette intégrale en calculant une approximation de l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de la fonction $\frac{1}{x}$.

Pour l'approximation, on remplacera le graphe de la fonction, dans l'intervalle $[1;2]$, par 4 segments de droites. Les extrémités de ces segments seront 5 points dont les abscisses sont régulièrement espacées. L'abscisse du premier point sera égale à 1, l'abscisse du deuxième point sera égale à 1.25, etc. On arrondira à nouveau les résultats au millième.

Problème 4. (12 points)

On dit que le nombre z est un zéro double du polynôme $P(x)$ si celui-ci peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x - z)^2 \cdot Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme dont z n'est pas un zéro.

- a) Montrer que si z est un zéro double du polynôme $P(x)$, alors z est également un zéro du polynôme $P'(x)$ (dérivée de $P(x)$).
- b) Expliquer pourquoi un zéro double d'un polynôme ne peut pas être calculé ou approché à l'aide de l'algorithme de la bisection.
- c) Écrire le polynôme $P(x) = 12x^3 - 52x^2 + 75x - 36$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P(x)$ possède un zéro double. Utiliser le résultat de la question a) et employer le schéma de Horner.

Problème 5. (12 points)

En se basant sur la table de mortalité ci-dessous, répondre aux questions suivantes en détaillant les calculs.

- a) Quelle probabilité un homme de 55 ans a-t-il d'être encore en vie à 56 ans ? à 60 ans ?

Ces deux réponses sont utiles pour la suite du problème. Si elles n'ont pas été trouvées, on prendra (si nécessaire) $p(56) = 0.992345$ et $p(60) = 0.954321$.

- b) Une personne née le 1^{er} janvier, souhaite contracter le jour de son anniversaire de 55 ans une assurance vie, de sorte qu'en cas de décès pendant l'année en cours, son épouse touchera de l'assurance la somme de 100'000.-, le 1^{er} janvier de l'année suivante. S'il ne décède pas dans l'année, la prime versée à l'assurance est perdue.
Sans tenir compte de l'intérêt de l'argent, donc en considérant un taux d'intérêt de 0%, calculer le montant de la prime unique que l'assureur doit faire payer à ce client, si la prime ne doit couvrir que le risque de décès.
- c) Répondre à la question du point b, mais en considérant un taux d'intérêt de l'argent de 1.5%.
- d) Même question qu'au point c, mais la prime unique payée par le client le jour de ses 55 ans doit couvrir une assurance pour une durée de 5 ans. En cas de décès entre 55 et 60 ans, l'épouse touchera de l'assurance la somme de 100'000.-, 5 ans après le versement de la prime.

Extrait de la table de mortalité des hommes de la population suisse

Age x	Nombre de survivant à l'âge x l_x	Probabilité de survie à l'âge x p_x	Probabilité de décès à l'âge x q_x	Espérance moyenne de vie à l'âge x e_x
0	100 000	0.994 662	0.005 338	77.22
1	99 466	0.999 597	0.000 403	76.63
2	99 426	0.999 688	0.000 312	75.66
...	...	...	...	...
54	93 311	0.994 853	0.005 147	26.14
55	92 831	0.994 343	0.005 657	25.28
56	92 305	0.993 782	0.006 218	24.42
57	91 731	0.993 167	0.006 833	23.57
58	91 105	0.992 491	0.007 509	22.73
59	90 421	0.991 747	0.008 253	21.89
60	89 674	0.990 929	0.009 071	21.07
61	88 861	0.990 029	0.009 971	20.26
62	87 975	0.989 037	0.010 963	19.46
...	...	...	...	...
106	13	0.486 256	0.513 744	1.20
107	6	0.431 982	0.568 018	0.93
108	3	0.000 000	1.000 000	0.50