



Examen suisse de maturité, session d'été 2012

PHYSIQUE ET APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3 heures

Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures réparties en deux heures pour la partie Applications des Mathématiques et une heure pour la partie Physique, les points étant répartis à environ 2/3 pour Applications des mathématiques et 1/3 pour Physique. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Nombre de points obtenus :

Physique

Problème 1 :/ 10

Problème 2 :/ 10

Sous total :/ 20

Applications des mathématiques

Problème 1 :/ 23

Problème 2 :/ 17

Sous total :/ 40

Total :/ 60

Note :

Correcteur N°1 :

Date :

Correcteur N°2 :

Date :

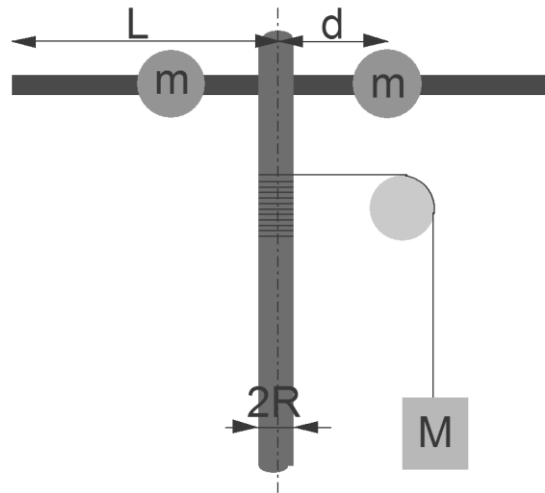
Partie « Physique »

Durée indicative : 60 minutes

Problème 1 (10 points)

Une barre de longueur $2L$ est fixée à une tige verticale de rayon R passant par son centre. L'ensemble peut tourner librement, dans un plan horizontal autour de l'axe de symétrie de la tige verticale. Deux boules identiques, de masse m (considérées comme des points matériels), percées d'un trou, sont enfilées sur la barre, chacune à distance d de l'axe de rotation. Un fil de longueur $2d$, inextensible et de masse négligeable, relie les deux boules (voir croquis ci-contre).

Le système (tige verticale, barre horizontale et boules) est symétrique. Le moment d'inertie du système par rapport à son axe de rotation est I .



On fait tourner le système grâce à la chute d'un poids de masse M . Ce poids entraîne le système par l'intermédiaire d'un deuxième fil enroulé autour de la tige verticale et passant sur une poulie (voir le croquis ci-contre). Ce deuxième fil est aussi inextensible, et d'épaisseur et masse négligeables. La poulie a également une masse négligeable et tourne sans frottement autour de son axe horizontal.

- Initialement, le système est au repos. Le poids de masse M « tombe » d'une hauteur h . Calculer cette distance h pour que le système atteigne une vitesse angulaire donnée ω . Exprimer le résultat au moyen des données de l'énoncé. (*L'énergie est conservée durant cette chute*). (5 points)
- Calculer le temps Δt pendant lequel le contrepoids doit descendre avant que le système n'atteigne cette vitesse angulaire donnée ω . Exprimer le résultat au moyen des données de l'énoncé. (*Le mouvement est un MRUA*). (5 points)

Application numérique :

$$L = 30,0 \text{ cm}$$

$$R = 5,0 \text{ mm}$$

$$d = 5,0 \text{ cm}$$

$$m = 100 \text{ g}$$

$$I = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$M = 500 \text{ g}$$

$$\omega = 15 \text{ rad/s}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Problème 2 (10 points)

On considère un noyau cylindrique et vertical en fer doux de rayon r , et de hauteur L très grande. Le bas de ce noyau est entouré d'un bobinage parcouru par un courant dépendant du temps t . Ce courant crée un champ magnétique $B(t)$ dépendant du temps qui est différent à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre en fer. Ce champ magnétique est décrit par :

- Un champ magnétique vertical d'intensité

$$B(t) = K t$$

$B(t)$ est uniforme à l'intérieur du noyau ; il est nul à l'extérieur. K est une constante mesurée et t est le temps.

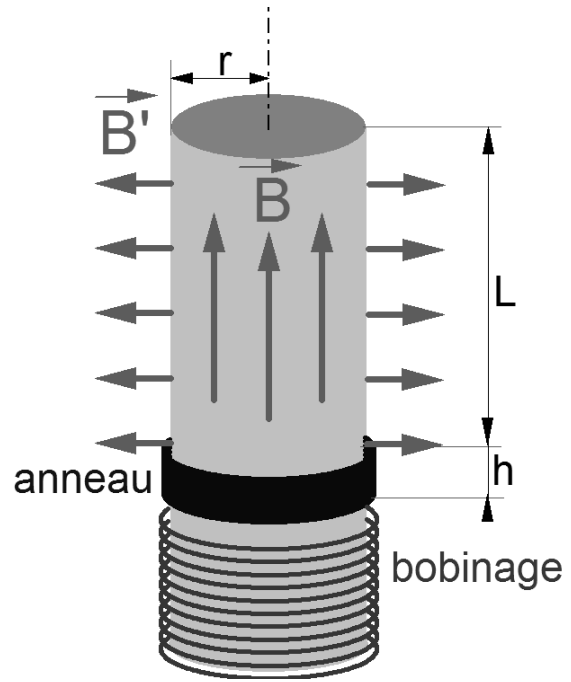
- Un champ magnétique radial d'intensité

$$B'(t) = K' t$$

autour du noyau et nul à l'intérieur. K' est une constante connue et t est le temps.

Un anneau métallique peut glisser sans frottement le long du noyau. L'an-

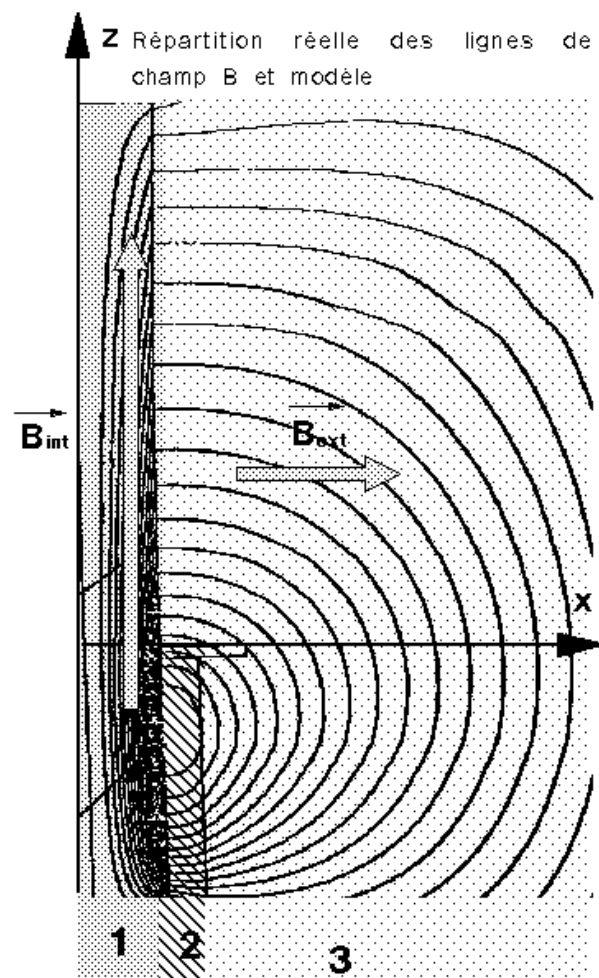
neau en coupe ci-contre a une résistance R et une masse M connues. On peut admettre que l'espace entre le noyau et l'anneau est négligeable et que l'on peut négliger l'épaisseur de l'anneau pour certains calculs.



a) Expliquer à l'aide d'un dessin pourquoi l'anneau est accéléré le long du noyau en fer doux. Représenter sur deux dessins de l'anneau vu de dessus et en coupe les champs magnétiques, le courant et les forces qui s'exercent. (5 points)

b) Calculer l'intensité du courant électrique dans l'anneau. Exprimer le résultat en termes des données de l'énoncé. (3 points)

c) Pour que l'anneau monte le plus haut possible, est-ce préférable qu'il soit en aluminium ou en cuivre ? Justifier la réponse. (2 points)



Application numérique :

$$r = 20 \text{ mm} ; M = 2,7 \text{ g}$$

$$R = 0,42 \text{ m}\Omega \quad K = 1,6 \text{ T/s}$$

$$K' = 0,14 \text{ T/s}$$

Partie « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (23 points)

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = x^2 + y$ et une condition initiale $y(0) = -1$, autrement dit $y = -1$ lorsque $x = 0$.

On appelle $f(x)$ la solution de l'équation qui respecte la condition initiale.

- a) Par la méthode d'Euler, estimer $f(4)$ en quatre pas.

Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les résultats obtenus en reportant et reliant les points calculés.

- b) En résolvant l'équation différentielle, prouver que $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$.

D'après les résultats de la question a), le graphe de la fonction f passe par un minimum M dont l'abscisse est dans l'intervalle $[0;3]$ et coupe l'axe des abscisses en un point situé à droite du minimum.

- c) En appliquant l'algorithme de la bisection, déterminer une approximation de l'abscisse du minimum, puis calculer l'ordonnée correspondante.
On arrêtera les calculs dès qu'on aura trouvé un point en lequel la pente de la tangente, en valeur absolue, est plus petite que 0,05.
- d) En appliquant deux fois l'algorithme de Newton et en prenant $x_0 = 2,5$ comme valeur initiale, déterminer une approximation du zéro de f .
- e) Calculer les coordonnées du point d'inflexion du graphe de f .
- f) Représenter le graphe de f pour $x \in [0;3]$.

Problème 2 (17 points)

Ce problème est constitué de trois questions concernant des algorithmes, mais **indépendantes les unes des autres**.

- a) Déterminer le plus grand diviseur commun de 1071 et de 1029 en utilisant l'algorithme d'Euclide et en détaillant les calculs.
- b) Résoudre le système d'équation ci-dessous en utilisant la méthode de Gauss et en explicitant chaque étape de la démarche.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 17 \end{cases}$$

- c) Maximiser $z = 3x + 2y$ sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 5x + 4y \leq 6 \\ 4x + 5y \leq 6 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$