

Examen suisse de maturité, session d'été 2011

PHYSIQUE ET APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3 heures

Nom : Prénom : Groupe :

Le candidat traite deux problèmes par discipline. Il a donc 3 heures à disposition pour traiter deux problèmes de physique sur les trois proposés et deux problèmes d'applications des mathématiques sur les trois proposés. Chaque problème vaut 20 points. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les quatre problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les deux problèmes de physique et sur un deuxième feuillet les deux problèmes d'applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom, numéro de groupe et les problèmes qu'il décide de traiter.

Nombre de points obtenus :

Physique

Problème 1 :/ 20

Problème 2 :/ 20

Problème 3 :/ 20

Sous total :/ 40

Applications des mathématiques

Problème 1 :/ 20

Problème 2 :/ 20

Problème 3 :/ 20

Sous total :/ 40

Total :/ 80

Note :

Correcteur N°1 :

Correcteur N°2 :

Date :

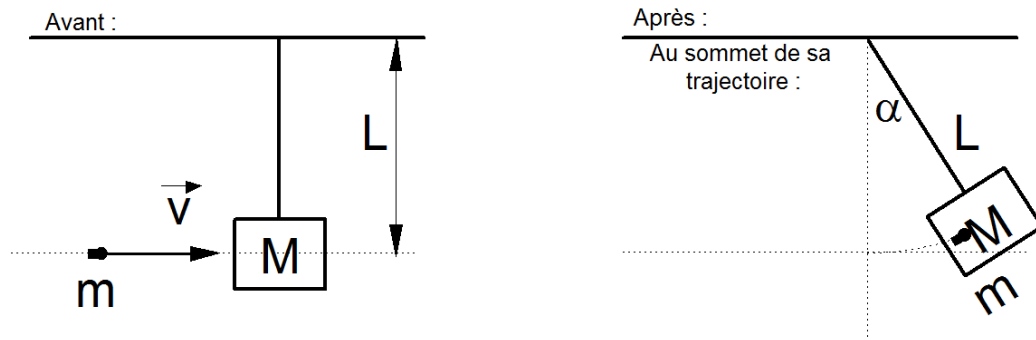
Date :

Partie « Physique »

Durée indicative : 90 minutes

1. Problème de mécanique. (20 points)

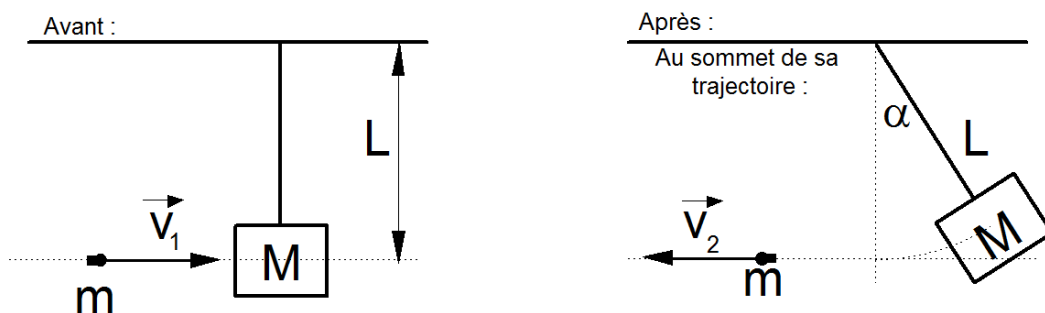
On désire mesurer la vitesse d'une balle de fusil de masse m . Pour ce faire, on tire horizontalement dans un bloc de bois de masse M et l'on mesure un angle de déviation maximum α par rapport à la verticale. Le bloc est suspendu à un fil non extensible de masse négligeable. Le centre de masse du pendule est situé à une hauteur L sous le point d'attache. Pour les calculs, on considérera les masses m et M comme ponctuelles et on admettra que tous les chocs sont instantanés.



- a) Citer les 2 lois de conservation utilisées.
- b) Déterminer la vitesse v de départ (figure de droite). Après le choc, la balle reste coincée dans le bloc au centre de masse.

Exprimer la vitesse v en fonction de m , M , L et α . On donnera d'abord l'expression littérale puis on calculera la valeur numérique.

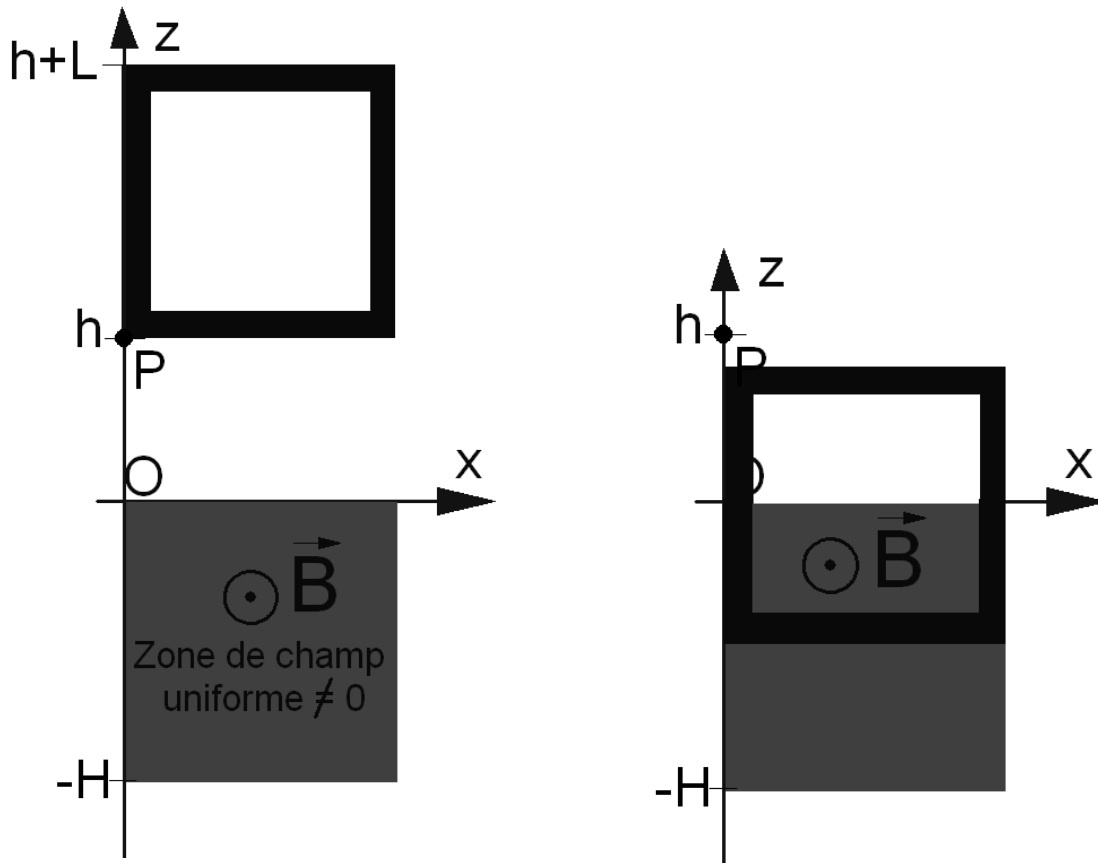
- c) Dans un 2^{ème} cas, on tire horizontalement une balle de masse m et de vitesse v_1 dans un bloc de bois de masse M . On suppose que le choc est parfaitement élastique et que la balle rebondit avec la vitesse v_2 . Comme au point b), on mesure un angle α de déviation maximum par rapport à la verticale. Exprimer les vitesses v_1 et v_2 de la balle avant et après le choc en fonction de m , M , L et α . On donnera d'abord l'expression littérale puis on calculera la valeur numérique.



Application numérique pour les parties b) et c): masse de la balle : $m = 4 \text{ g}$; angle de déviation max. du pendule : $\alpha = 25^\circ$; longueur du fil : $L = 65 \text{ cm}$; Masse du bloc : $M = 3.75 \text{ kg}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

2. Problème d'électromagnétisme. (20 points)

Une spire en aluminium, de masse $m = 50 \text{ g}$, de résistance $R = 0,001 \Omega$ et de forme carrée de côté de longueur $L = 4 \text{ cm}$ tombe dans une zone également carrée de côté $H = 4 \text{ cm}$ où règne un champ magnétique uniforme $B = 0,5 \text{ T}$, perpendiculaire au plan de la spire. Dans un référentiel immobile d'axes Oxz , on repère la position de la spire par un point P situé sur le sommet en bas à gauche. La zone où le champ B n'est pas nul s'étend de O à H sur Ox et de O à $-H$ sur Oz . Au départ, (schéma de gauche) la spire est immobile et le point P se trouve à une hauteur h au-dessus de l'origine O . Dès que la spire atteint la zone où le champ B n'est pas nul, sa vitesse est alors constante (schéma de droite). Prendre $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.



- Compléter le dessin de droite en représentant les vecteurs forces ainsi que le sens du courant I induit lorsque l'anneau est freiné.
- Déterminer littéralement la hauteur $h = OP$ à laquelle il faut lâcher la spire pour que sa vitesse reste constante lorsque l'anneau se trouve dans la zone où le champ B n'est pas nul. Exprimer h en fonction de m , R , B et L .
- Représenter le graphique $v(t)$ pour des positions $h > z > -3L$. Calculer les points nécessaires pour construire le graphique.
- Décrire qualitativement comment le graphique $v(t)$ serait modifié si la taille de la zone où le champ B n'est pas nul était supérieure à celle de l'anneau. Par exemple pour $H = 5 \text{ cm} > L$ tout en gardant la position des points O et P identique.

3. Problème d'ondes. (20 points)

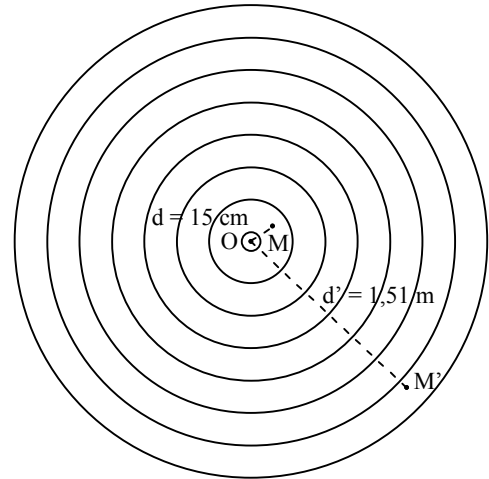
A la surface d'une eau tranquille, on fait tomber en un point O une succession régulière de gouttes d'eau à la fréquence f de 90 gouttes par minute. Une onde circulaire, que l'on considérera comme transversale et sinusoïdale, se déplacera ainsi à la surface de l'eau à la célérité $c = 60 \text{ cm/s}$. On fait également l'hypothèse que les pertes d'énergie sont négligeables et qu'ainsi, l'amplitude de l'onde ne décroît pas avec la distance et vaut $A = 7,5 \text{ mm}$. On mesure le temps $t = 0$ à partir du moment où la première goutte atteint l'eau.

1. On a préalablement placé un morceau de liège de masse négligeable au point M situé à une distance $d = 15 \text{ cm}$ de O.

- 1a) Que vaut la distance entre deux fronts d'onde consécutifs ? Comment s'appelle cette distance ?

- 1b) Donner l'expression du mouvement vertical $y_M(t)$ du morceau de liège en fonction de A , f , d , c et t .

- 1c) Que vaut y_M lorsque $t = 1,5 \text{ s}$?



2. Un deuxième fragment de liège également de masse négligeable est placé au point M' situé à une distance $d' = 1,51 \text{ m}$ de O.

- 2a) Exprimer la différence de phase en degrés entre le mouvement de M et celui de M'.

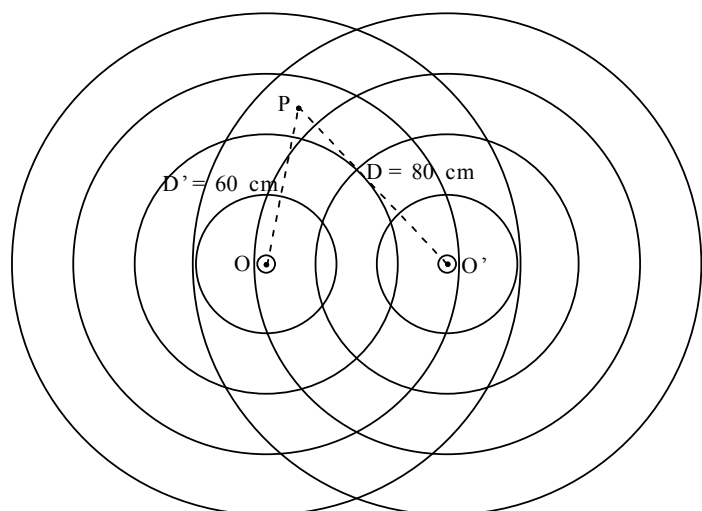
3. Un très petit bateau télécommandé que l'on peut considérer comme ponctuel et de masse négligeable se déplace en direction du point O à la vitesse $v_B = 20 \text{ cm/s}$.

- 3a) Que vaut la longueur d'onde mesurée par le « capitaine » de ce bateau ?

- 3b) Que vaut la fréquence de l'onde mesurée par le « capitaine » de ce bateau ?

4. Maintenant, on fait également tomber en un point O' une succession régulière de gouttes d'eau identique à celle tombant en O. Ces gouttes tombent de façon synchrone avec celles qui tombent en O.

On place un troisième fragment de liège toujours de masse négligeable en un point P situé à une distance $D = 80 \text{ cm}$ de O et $D' = 60 \text{ cm}$ de O'. La distance OO' vaut 70 cm .



- 4a) L'expression du mouvement vertical du morceau de liège est donnée par y_P . Que vaut y_P lorsque $t = 2 \text{ s}$?

- 4b) Combien de points situés sur le segment OO' sont-ils des nœuds ? Où sont situés ces points par rapport à O ?

Partie « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 90 minutes

Problème 1 (20 points)

Ce problème est constitué de trois parties **indépendantes les unes des autres**.

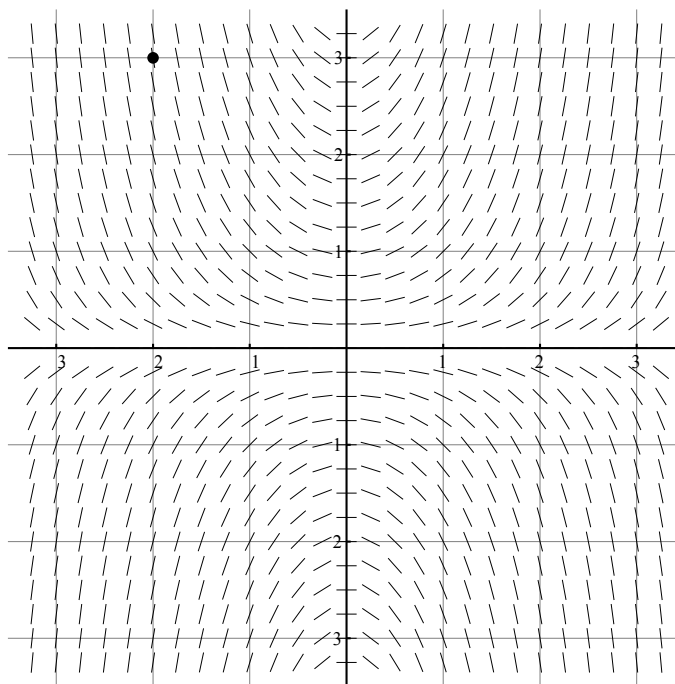
Partie A

- a) Vérifier que, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $y = \sin(x)$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{1 - y^2}$.
- b) Estimer la valeur de $\sin(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{3}$ pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{1 - y^2}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Partie B

Une équation différentielle $y' = f(x, y)$ est représentée ci-contre par un champ des directions.

- c) Esquisser, sur le graphique ci-contre, le graphe de la solution particulière qui passe par le point $A(-2; 3)$.
- d) En observant, pour les points à coordonnées entières, les pentes données, deviner l'expression de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$.
Déterminer ensuite la solution générale de l'équation différentielle devinée ainsi que la solution particulière dont le graphe passe par le point $A(-2; 3)$.



Partie C

- e) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{3}y = e^{-\frac{x}{3}}$ ainsi que la solution particulière qui admet un extremum d'abscisse 1.

Problème 2 (20 points)

On donne les points $P_0(0;3)$, $P_1(1;6)$, $P_2(2;7)$ et $P_3(3;8)$.

- a) Déterminer l'équation de la droite qui approche ces points en employant la méthode des moindres carrés.
- b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de ces points.
- c) On aimerait trouver une droite d'équation $y = ax + b$ qui passe par le point P_0 et "près" des autres points. Dans l'équation de la droite, on fixe donc $b=3$.
En appliquant la méthode des moindres carrés, déterminer le coefficient a de la droite d'équation $y = ax + 3$ qui approche les trois autres points au mieux.
Le détail des calculs est demandé.
- d) Faire le calcul dans le cas général, c'est-à-dire déterminer le coefficient a de la droite d'équation $y = ax + b$, où b est supposé connu (la droite passe donc par le point $P_0(0;b)$), et qui approche (au sens des moindres carrés) un ensemble de points du plan $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, $P_3(x_3;y_3)$, $\dots$, $P_n(x_n;y_n)$.

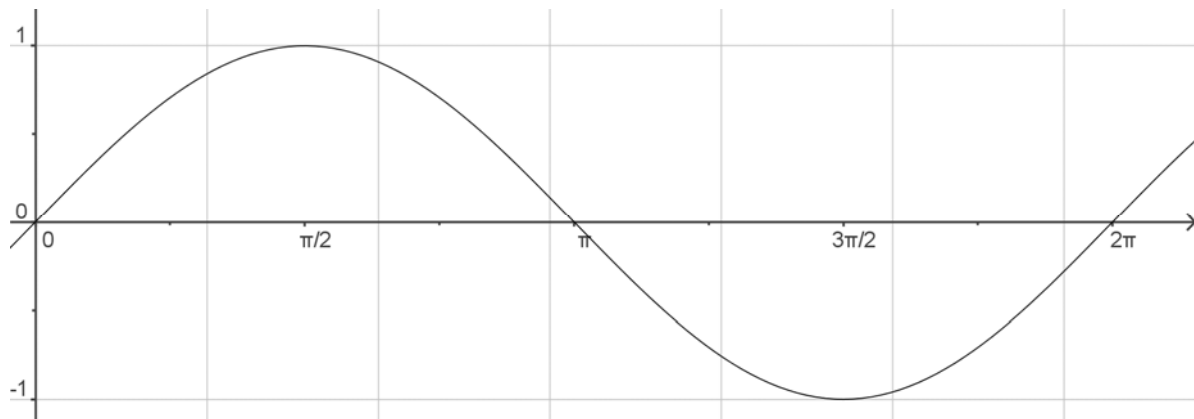
Problème 3 (20 points)

Ce problème est constitué de deux parties **indépendantes les unes des autres**.

Partie A

On donne la fonction $f(x) = \sin(x)$ avec $x \in [0; 2\pi]$. On aimerait résoudre l'équation $f(x) = 0$ en employant la méthode de Newton.

- Quelles sont les valeurs initiales pour lesquelles la méthode de Newton diverge dès la première itération à cause d'une division par zéro ?
- Résoudre l'équation en prenant comme valeur initiale $x_0 = 2$.
Noter les termes successifs de la suite de Newton jusqu'à ce que cette suite soit constante lorsqu'on travaille avec 5 chiffres significatifs.
- Déterminer, par approximation graphique, deux valeurs initiales pour lesquelles la méthode de Newton diverge lors de la deuxième itération à cause d'une division par zéro. Faire les constructions sur le graphique ci-dessous et donner les réponses au dixième.
- Expliquer pourquoi les solutions de l'équation $x - \frac{\pi}{2} - \tan(x) = 0$ sont des valeurs initiales pour lesquelles la méthode de Newton diverge lors de la deuxième itération.
- Expliquer pourquoi une solution de l'équation $x - \frac{\pi}{2} - \tan(x) = 0$ est comprise dans l'intervalle $[4; 4,5]$.
- En utilisant la méthode de la bisection et en partant de l'intervalle $[4; 4,5]$, trouver un nouvel intervalle dont la longueur est égale à $\frac{1}{16}$ et qui contient une solution de cette dernière équation.



Partie B

- Décomposer $\frac{15}{19}$ en somme de fractions unitaires (de la forme $\frac{1}{a}$ avec a entier) en détaillant les calculs.