



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2010

PHYSIQUE ET APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3 heures

Nom : Prénom : Groupe :

Le candidat traite deux problèmes par discipline. Il a donc 3 heures à disposition pour traiter deux problèmes de physique sur les trois proposés et deux problèmes d'applications des mathématiques sur les trois proposés. Chaque problème vaut 20 points. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les quatre problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les deux problèmes de physique et sur un deuxième feuillet les deux problèmes d'applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom, numéro de groupe et les problèmes qu'il décide de traiter.

Nombre de points obtenus :

Physique

Problème 1 :/ 20

Problème 2 :/ 20

Problème 3 :/ 20

Sous total :/ 40

Applications des mathématiques

Problème 1 :/ 20

Problème 2 :/ 20

Problème 3 :/ 20

Sous total :/ 40

Total :/ 80

Note :

Correcteur N°1 :

Date :

Correcteur N°2 :

Date :

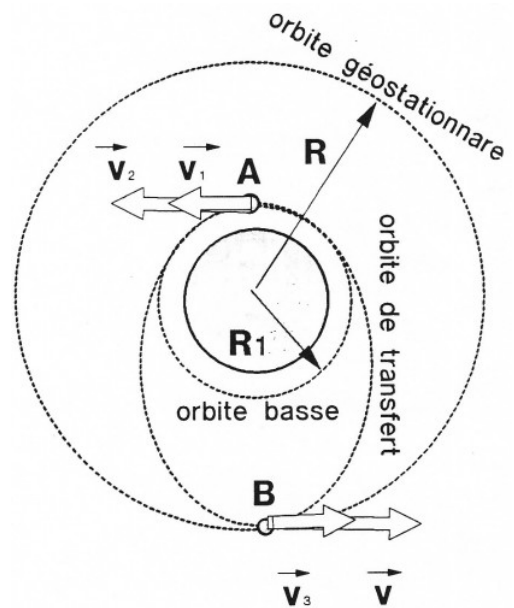
Partie « Physique »

Durée indicative : 90 minutes

1. Problème de mécanique : Changement d'orbite d'un satellite (20 points)

Pour mettre un satellite de télécommunications sur son orbite géostationnaire (immobile par rapport à un point de la Terre), on procède à un transfert d'orbites de la manière suivante :

- Le satellite se déplace d'abord sur une orbite circulaire basse de rayon R_1 , à la vitesse v_1 .
- Au point A, il subit une brusque accélération et acquiert une vitesse v_2 suffisante pour qu'il se déplace sur une orbite elliptique dont le point A se trouve sur l'orbite circulaire basse de rayon R_1 , et un autre point B sur l'orbite géostationnaire circulaire de rayon R .
- Lorsque le satellite arrive au point B, il subit une brusque accélération qui augmente sa vitesse de v_3 à v . La vitesse v doit être suffisante pour que le satellite reste sur l'orbite géostationnaire circulaire.



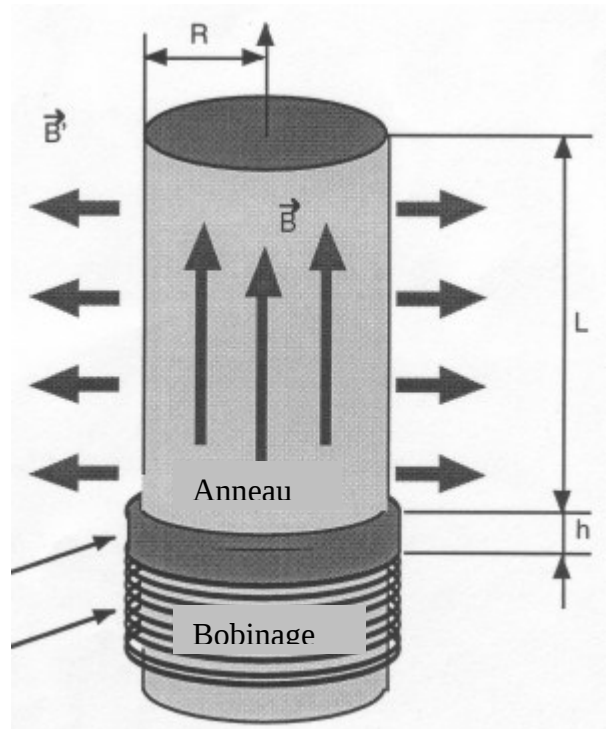
- a) Calculer la vitesse v , du satellite sur son orbite circulaire basse de rayon R_1 à une hauteur $h = 100$ km de la surface terrestre (altitude 100 km).
(5 points)
- b) Déterminer le rayon R et la vitesse v du satellite sur son orbite géostationnaire.
(5 points)
- c) Calculer les vitesses v_2 et v_3 de l'orbite elliptique.
(10 points)

2. Problème d'électromagnétisme « Jumping ring » (20 points)

On considère un noyau cylindrique et vertical en fer doux de hauteur L et de rayon R . Le bas de ce noyau est entouré d'un bobinage qui crée :

- Un champ d'induction $B = K t$ uniforme à l'intérieur du noyau et nul à l'extérieur.
- Un champ d'induction $B' = K' t$ radial autour du noyau et nul à l'intérieur.

Un anneau en aluminium peut glisser sans frottement le long du noyau. L'anneau a une section $S = e * h$. On peut admettre que l'espace entre le noyau et l'anneau est négligeable et l'on peut négliger l'épaisseur e de l'anneau pour certains calculs.



- a) Expliquer et dessiner pourquoi et comment l'anneau est accéléré le long du noyau en fer doux. (6 points)
- b) Montrer que l'accélération de l'anneau en fonction du temps est de la forme $a(t) = \gamma t + \beta$. (8 points)
- c) Déterminer la vitesse de l'anneau en fonction du temps. (4 points)
- d) Avec une scie, on fend l'anneau verticalement et l'on recommence la même expérience. Décrire et calculer ce qui se passe. (2 points)

Application numérique :

$$L = 30 \text{ cm}$$

$$R = 2 \text{ cm}$$

$$K' = 0,14 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$$

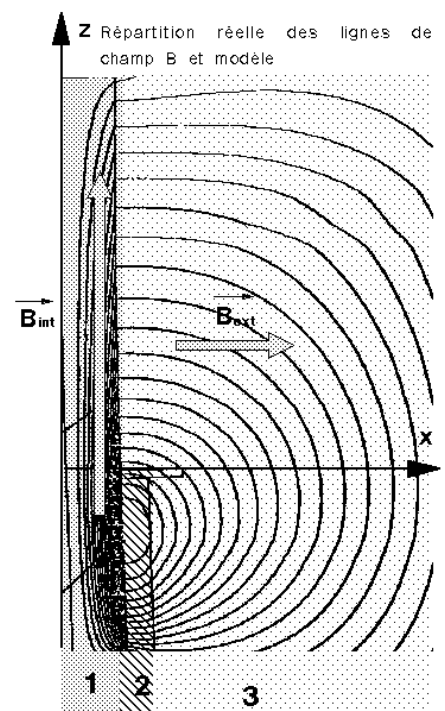
$$K = 1,6 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$S = e * h = 8 \text{ mm}^2$$

Pour information (cas réel) :

Champ B réel autour du noyau :

- 1) Zone de champ $B = B_{\text{int}}$ (intérieur) vertical admis uniforme $B_{\text{int}} = K t$
- 2) Bobine
- 3) Zone de champ $B' = B_{\text{ext}}$ (extérieur) horizontal et radial admis uniforme près du noyau $B_{\text{ext}} = K' t$



3. Problème de thermodynamique (20 points)

On envisage une certaine quantité (n) de gaz enfermée dans un cylindre de section S .

- a) A partir de l'équation des gaz parfaits, exprimer littéralement la pression (p) du gaz. (1 point)

- b) Calculer p si :
 $V_1 = 40 \text{ cm}^3$ $n = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$
 $T_1 = 300 \text{ K}$ (2 points)

- c) Lorsque ce gaz se détend de façon isotherme, il fournit un travail A .
Exprimer le travail fourni par le gaz lorsque son volume s'accroît de V_1 à V_2 . (5 points)

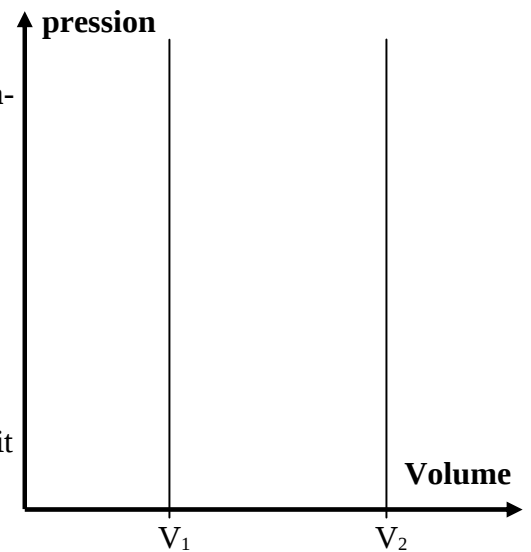
- d) Calculer ce travail si :
 $V_1 = 40 \text{ cm}^3$ $V_2 = 400 \text{ cm}^3$
 $T_2 = 1200 \text{ K}$ $n = 1,80 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$ (3 points)

- e) Calculer le travail reçu par cette même quantité de gaz si $T_1 = 300 \text{ K}$ lorsqu'on le comprime de $V_2 = 400 \text{ cm}^3$ à $V_1 = 40 \text{ cm}^3$. (2 points)

- f) Sur le diagramme ci-contre, tracer deux isothermes (l'une à température T_1 , l'autre à température $T_2 > T_1$). Identifier clairement chacune des courbes sur le diagramme (T_1 et T_2).
Expliquer l'allure des courbes isothermes (3 points)

- g) Que représente l'aire délimitée par les deux isothermes et les deux verticales passant par V_1 et V_2 ? (2 points)

- h) En utilisant les résultats des points d) et e), calculer le travail fourni par le gaz sur un cycle complet. (2 points)



Partie « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 90 minutes

Problème 1 (20 points)

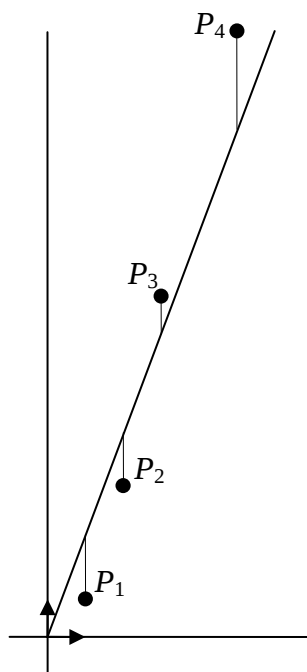
On considère l'équation différentielle $y' = x + y$.

- Représenter le champ de directions associé à cette équation. On prendra x et y dans l'intervalle $[-1; 2]$ et on tracera un segment représentant une direction en chaque point à coordonnées entières.
- Résoudre l'équation, donner la solution générale.
- On appelle $f(x)$ la solution de l'équation satisfaisant la condition initiale $f(0) = 0$. Déterminer $f(x)$.
- En partant du point $O(0; 0)$, calculer une approximation de $f(2)$ en employant la méthode d'Euler avec 4 pas. Présenter les calculs de manière détaillée et donner toutes les réponses sous forme de fraction.
- Dans un même repère, tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [0; 2]$ et reporter les estimations calculées à la question précédente.

Problème 2 (20 points)

On aimerait approcher la parabole d'équation $y = x^2$ par une droite de régression linéaire sur l'intervalle $[0; 4]$.

- a) Trouver la droite des moindres carrés (de la forme $y = ax + b$) obtenue en prenant tous les points de la parabole à coordonnées entières situés dans l'intervalle.
On prendra donc les points $P_0(0;0)$, $P_1(1;1)$, $P_2(2;4)$, $P_3(3;9)$ et $P_4(4;16)$.
- b) Pour quelles valeurs de x , pas forcément entières mais situées dans l'intervalle $[0; 4]$, la droite donne-t-elle la valeur exacte de la fonction $y = x^2$?
- c) Déterminer les 3 valeurs de x , pas forcément entières mais situées dans l'intervalle $[0; 4]$, pour lesquelles l'approximation est la plus mauvaise. Combien vaut alors l'erreur ?
- d) Avec les mêmes points, trouver la droite de régression de x par rapport à y (de la forme $x = a'y + b'$).
- e) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire des cinq points de la question a).
- f) On considère maintenant les droites d'équation $y = mx$. Trouver la pente m de la droite qui passe le plus près possible des cinq points mentionnés à la question a), au sens des moindres carrés.



Indication

La somme des carrés des distances verticales entre la droite cherchée et les points donnés doit être minimale.

Problème 3 (20 points)

On donne la fonction polynomiale $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 5$.

- a) En utilisant le schéma de Horner, calculer $f(-4)$ et $f(-3)$.
- b) Expliquer pourquoi un zéro de f se trouve dans l'intervalle $[-4; -3]$.
- c) En utilisant la méthode de la bisection, trouver un intervalle dont la longueur est égale à $\frac{1}{4}$ et qui contient un zéro de f . Les calculs peuvent se faire à la machine, mais on en donnera le détail.
- d) Déterminer les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de f .
- e) Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé.

On aimerait résoudre l'équation $f(x) = 0$ en utilisant l'algorithme de Newton.

- f) En observant le graphe, donner un intervalle (le plus grand possible) dans lequel on trouvera des valeurs initiales pour lesquelles la méthode de Newton convergera rapidement.
- g) Calculer une approximation du zéro de f en appliquant une seule fois la méthode de Newton avec la valeur initiale $x_0 = -3$.
- h) Quelles sont les valeurs initiales pour lesquelles la méthode de Newton diverge dès la première itération à cause d'une division par zéro ?
- i) Déterminer, par calcul, trois valeurs initiales pour lesquelles la méthode de Newton diverge à la deuxième itération à cause d'une division par zéro.