



Examen suisse de maturité, session d'été 2010

PHYSIQUE ET APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3 heures

Nom : Prénom : Groupe :

Le candidat traite deux problèmes par discipline. Il a donc 3 heures à disposition pour traiter deux problèmes de physique sur les trois proposés et deux problèmes d'applications des mathématiques sur les trois proposés. Chaque problème vaut 20 points. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les quatre problèmes.

Le candidat présente sur un feuillet les deux problèmes de physique et sur un deuxième feuillet les deux problèmes d'applications des mathématiques. Il indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom, numéro de groupe et les problèmes qu'il décide de traiter.

Nombre de points obtenus :

Physique

Problème 1 :/ 20

Problème 2 :/ 20

Problème 3 :/ 20

Sous total :/ 40

Applications des mathématiques

Problème 1 :/ 20

Problème 2 :/ 20

Problème 3 :/ 20

Sous total :/ 40

Total :/ 80

Note :

Correcteur N°1 :

Correcteur N°2 :

Date :

Date :

Partie « Physique »

Durée indicative : 90 minutes

1. Problème de mécanique : Saut à l'élastique (20 points)

Une personne de masse $m = 80 \text{ kg}$ attachée à une corde élastique saute d'un pont de hauteur $H = 95 \text{ m}$. La corde élastique non tendue a une longueur de 70 m . Au point le plus bas de la trajectoire, la personne se trouve à 5 m du sol. Dans toute la suite du problème, on néglige la taille de la personne, assimilée à un point matériel.

- a) Calculer la vitesse de la personne après 70 m de chute.
(4 points)
- b) Calculer la raideur de la corde, assimilable à un ressort.
(3 points)
- c) Calculer la force de traction exercée par la corde sur la personne au moment où celle-ci est au point le plus bas de la chute.
(4 points)
- d) Calculer la grandeur de l'accélération de la personne au moment où celle-ci est au point le plus bas de la chute.
(3 points)
- e) Faites un graphique de l'accélération de la personne en fonction de l'altitude pour toute la durée de la chute.
(3 points)
- f) Après plusieurs oscillations, la personne s'immobilise. Calculer la hauteur à laquelle elle s'arrête.
(3 points)

Remarques :

1. On utilisera l'approximation $g = 10 \text{ m/s}^2$ dans tous les calculs.
2. Ceux qui n'ont pas trouvé la réponse au point b) peuvent continuer la résolution avec la valeur (fausse) $k = 400 \text{ N/m}$.

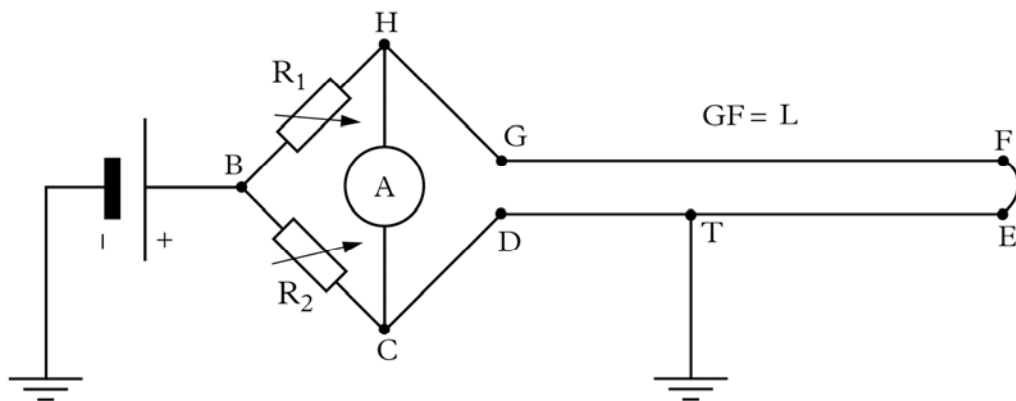
2. Problème d'électromagnétisme : Court-circuit (20 points)

Un câble d'alimentation électrique souterrain est constitué de deux fils ayant chacun une longueur L . Un des fils présente un défaut d'isolation, ce qui provoque une mise à terre en un endroit T de position inconnue.

Pour localiser l'emplacement du défaut, on court-circuite le câble à une extrémité (EF) et on branche à l'autre extrémité (GD) le montage ci-dessous.

Les dimensions du montage sont négligeables devant la longueur L et une des bornes de la source de tension est aussi mise à terre.

On règle les deux résistances variables R_1 et R_2 de façon à ce que l'ampèremètre branché entre C et H indique un courant nul.



- Expliquez le principe de fonctionnement du montage en supposant que les deux mises à terre sont au même potentiel. (7 points)
- Etablissez l'expression algébrique de l'emplacement $x = DT$ du défaut. (7 points)
- Montrez que la comparaison des deux résistances identifie le fil défectueux et calculez numériquement l'emplacement du défaut. (6 points)

Données numériques :

$$L = 100 \text{ m}$$

$$R_1 = 160 \, \Omega$$

$$R_2 = 40 \, \Omega$$

3. Problème d'Astrophysique (20 points)

Une mission spatiale effectue un certain nombre de mesures dans un système solaire inconnu. Dans toute la suite, le terme « Soleil » désigne l'astre central de ce nouveau système.

- a) Une des planètes du système solaire a une trajectoire elliptique dont le demi-grand axe vaut 100 millions de km et met 200 jours pour un tour complet autour du Soleil.
Calculer la masse du Soleil
(3 point)
- b) A une distance de 200 millions de km du Soleil, on mesure un éclat $E = 1'000 \text{ W/m}^2$.
Calculer la luminosité (puissance radiative totale) du Soleil.
(3 point)
- c) Le spectre d'émission du Soleil présente un maximum à la longueur d'onde $\lambda = 450 \text{ nm}$.
Calculer la température effective à la surface du Soleil.
(3 points)
- d) Calculer le rayon du Soleil.
(3 points)
- e) Calculer la masse perdue chaque seconde par le Soleil à cause du rayonnement.
(3 points)
- f) Calculer la température moyenne à la surface d'une planète située à 200 millions de km du Soleil en supposant qu'elle est en équilibre radiatif.
(5 points)

Remarques :

1. Tous les corps sont assimilables à un corps noir.
2. Ceux qui n'ont pas trouvé la réponse aux points b) et/ou c) peuvent continuer la résolution avec les valeurs (fausses) $L = 6 \cdot 10^{27} \text{ W}$ et $T = 5'000 \text{ K}$.

Partie « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 90 minutes

Problème 1 (20 points)

On considère l'équation différentielle

$$(x+1) \cdot y' + y = 4x + 3$$

- a) Déterminer la solution générale de cette équation.
- b) On appelle $f(x)$ la solution particulière de l'équation satisfaisant la condition $f'(0) = 12$. Déterminer $f(x)$.
- c) On appelle $g(x)$ la solution particulière de l'équation dont le graphe passe par l'origine. Calculer une approximation de $g(3)$ en employant la méthode d'Euler avec des pas de longueur 1.
- d) Déterminer la fonction $g(x)$ et calculer la valeur exacte de $g(3)$.
- e) Dans un même repère, tracer le graphe de la fonction g pour $x \in [0; 3]$, ainsi que la ligne brisée obtenue à partir des estimations calculées avec la méthode d'Euler.
- f) Expliquer ce qu'il faudrait faire pour obtenir une meilleure approximation de $g(3)$, toujours avec la méthode d'Euler.

Problème 2 (20 points)

Problème de mathématiques financières, pour lequel on rappelle la formule ci-dessous.

Capitalisation par versements réguliers

$A_n = r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ où A_n est la valeur acquise à la fin de la n -ième année par n versements unitaires effectués au début de chaque année et $r = 1 + t$ (t = taux d'intérêts).

Lors de la naissance d'un enfant, ses parents souhaitent qu'il dispose de 10'000 francs quand il aura 18 ans. On suppose que pendant les 18 prochaines années le taux d'intérêt ne changera pas et sera égal à 2%.

- a) Calculer la somme que doivent verser les parents, s'ils décident de faire un versement unique le jour de la naissance de leur enfant.
- b) Calculer la somme qu'ils doivent verser chaque année, s'ils décident d'effectuer 18 versements annuels identiques, le premier versement étant effectué le jour de la naissance de leur enfant et le dernier versement le jour de ses 17 ans.
- c) Les parents décident de verser chaque année la somme trouvée à la question b), arrondie au franc supérieur, mais n'arrivent pas à effectuer les 4 derniers versements. De quelle somme l'enfant disposera-t-il quand il aura 18 ans ?
- d) Calculer la somme que les parents doivent verser chaque mois, s'ils décident d'effectuer 216 versements mensuels identiques ($216 = 18 \cdot 12$) plutôt que des versements annuels. Le premier versement est effectué le jour de la naissance de leur enfant, le deuxième un mois plus tard, et ainsi de suite.
- e) Déterminer le taux journalier correspondant à un taux annuel de 2%, puis calculer le nombre d'années et de jours après lesquels l'enfant disposera de 10'000 francs, si les parents versent chaque année 530 francs (le premier versement étant effectué le jour de la naissance de leur enfant).

Problème 3 (20 points)

Ce problème est constitué de quatre questions **indépendantes les unes des autres**.

- a) On considère la fonction polynomiale du deuxième degré $y = ax^2 + bx + c$ dont le graphe passe par les points $A(1;0)$, $B(2;9)$ et $C(3;22)$.
Écrire un système de 3 équations à 3 inconnues pour les coefficients du polynôme puis résoudre ce système par la méthode de Gauss, c'est-à-dire en le mettant sous forme triangulaire.
- b) Décomposer le polynôme $P(x) = 105x^3 + 23x^2 - 16x - 4$ en produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P\left(\frac{2}{5}\right) = 0$.
- c) Trouver une approximation de $\sqrt{2}$ en résolvant l'équation $x^2 - 2 = 0$ avec la méthode de Newton. Prendre comme valeur initiale $x_0 = 1$ et effectuer 3 itérations. Donner tous les résultats sous forme de fraction.
- d) On donne la fonction $f(x) = 2\cos(x) - x + 7$. En employant la méthode de la bisection, déterminer un nombre x tel que $|f(x)| < 0.1$.