



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2025

MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau supérieur

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages (4). Les réponses se font sur papier libre. À la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

La pose de tous les calculs doit figurer sur vos copies et les réponses doivent être justifiées par des calculs ou des explications.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires** ;
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus : Problème 1 : sur 14 pts

Problème 2 : sur 12 pts

Problème 3 : sur 12 pts

Problème 4 : sur 12 pts

Problème 5 : sur 12 pts

Total : **sur 50 pts**

..... Note

Examineur-trice en charge de la correction : Date :

Remarque éventuelle :

.....

Problème 1 : Analyse (obligatoire, 14 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 e^x - 5 e^x}{x + 1}$.

- a) Calculer les intersections du graphe de f avec les axes Ox et Oy . Donner le signe de f .
- b) Déterminer les équations des asymptotes au graphe de f .
- c) Établir que la dérivée de f est égale à $f'(x) = \frac{x e^x (x^2 + 2x - 3)}{(x + 1)^2}$.
- d) Étudier la croissance de f et donner les coordonnées de ses éventuels extremums.
- e) Représenter soigneusement le graphe de f dans un repère orthonormé.
- f) Donner une primitive de la fonction g définie par $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$.
Indication : effectuer une division euclidienne (ou polynomiale), puis intégrer.

Problème 2 : Géométrie plane (obligatoire, 12 points)

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $C(-2;3)$ et $S(2;5)$, la droite $d : x + 2y + 6 = 0$ et le cercle Γ_1 centré en C qui passe par S .

- a) Représenter les points C et S , la droite d et le cercle Γ_1 dans un repère orthonormé en choisissant une unité égale à deux carreaux.
- b) Donner l'équation du cercle Γ_1 .
- c) Vérifier par calcul que la droite d est tangente au cercle Γ_1 en un point T et calculer les coordonnées de ce point de tangence.
- d) Calculer l'angle $\widehat{TCS}$.
(Il n'est pas nécessaire d'avoir trouvé les coordonnées de T pour calculer cet angle.)
- e) Il existe un autre cercle Γ_2 , de même rayon que Γ_1 , qui lui aussi est tangent à d et passe par S . Calculer les coordonnées de son centre K .

Problème 3 : Nombres complexes
(à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

- a) Le polynôme p défini par $p(z) = z^3 - 2z^2 - 2iz + 4i$ admet $z = 2$ comme zéro. Trouver les autres zéros de ce polynôme complexe. Donner les solutions sous forme algébrique.

La suite du problème est indépendante de la première question.

On donne la fonction complexe f définie par $f(z) = i \cdot \bar{z} - 2 + 2i$, ainsi que les nombres $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + i$ et $z_3 = 2 + 4i$.

- b) Donner une interprétation géométrique de f faisant intervenir 3 transformations dans le plan de Gauss.
- c) Calculer les images $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ et $w_3 = f(z_3)$ des nombres z_1 , z_2 et z_3 par la fonction f , puis représenter ces six nombres dans le plan de Gauss.
- d) Les points invariants de f (les solutions de l'équation $f(z) = z$) forment une droite. Déterminer une équation de cette droite, puis représenter cette droite invariante dans le même repère qu'à la question précédente.
- e) Déterminer l'expression de la fonction $f \circ f$. Donner la réponse sous la forme la plus simple possible.
- f) Donner une nouvelle interprétation géométrique de f faisant intervenir une seule transformation dans le plan de Gauss.

Problème 4 : Algèbre linéaire
(à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On considère les applications linéaires f_k définies par la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ où k est un nombre réel.

- a) Montrer que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f_k pour tout $k \in \mathbb{R}$. Donner la valeur propre associée.
- b) Trouver l'unique valeur de k pour laquelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f_k .

On pose $k = 0$. Pour la suite du problème, l'application linéaire f est donc définie par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- c) Déterminer les valeurs propres de f . Donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre de f .
- d) Montrer que pour tout vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, le vecteur $f(\vec{w}) - \vec{w}$ est de la forme $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- e) Calculer A^2 , puis montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n > 0$.

Problème 5 : Probabilités

(à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Sékolène, une marchande de souvenirs, vient de recevoir un carton contenant 320 médailles, dont 80 sont dorées et les autres argentées. Parmi les médailles dorées, 60% représentent le Cervin, 30% le jet d'eau de Genève et les autres le pont couvert de Lucerne. Parmi les médailles argentées, 40% représentent le Cervin et les autres le jet d'eau de Genève.

Évariste, un touriste, prend une médaille au hasard dans ce carton. On admet que chaque médaille a la même probabilité d'être tirée.

- a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
- b) Calculer la probabilité que la médaille tirée par Évariste soit dorée et représente le Cervin.
- c) Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le jet d'eau de Genève vaut 52,5%.
- d) Sachant que la médaille tirée représente le jet d'eau de Genève, calculer la probabilité qu'elle soit argentée.
- e) Évariste hésite beaucoup pour choisir une médaille : il tire donc une médaille au hasard, la contemple, se gratte la tête et la remet dans le carton, en tire une deuxième, la contemple, se gratte la tête et la remet dans le carton, et ainsi de suite 28 fois. Quelle est la probabilité qu'il ait ainsi tiré 12 fois une médaille représentant le jet d'eau de Genève ?

Sékolène achète ces superbes médailles à la fabrique Médailles-Suisses SA. On considère qu'une médaille est conforme si son poids est compris entre 9,85 et 10,15 grammes. On a pu déterminer que la machine destinée à la production des médailles dorées donne des médailles dont le poids P en grammes suit une loi normale d'espérance mathématique $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 0,063$.

- f) Calculer la probabilité qu'une médaille produite par cette machine ne soit pas conforme.

L'usine possède une machine de production pour les médailles argentées. On sait que celle-ci donne des médailles dont le poids Q en grammes suit également une loi normale d'espérance $\mu = 10$.

- g) Calculer l'écart-type σ de cette seconde loi normale, sachant que 96% des médailles produites sont conformes.