



Examen suisse de maturité, session d'été 2025

MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE, NIVEAU SUPÉRIEUR

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages (4). Les réponses se font uniquement sur papier libre. A la fin de votre examen, vous devez rendre ce document avec votre travail.

La pose de tous les calculs doit figurer sur vos copies et les réponses doivent être justifiées par des calculs ou des explications.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus :

Problème 1 : / 14 points

Problème 2 : / 12 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

Note

Examineur-trice en charge de la correction :

.....

Remarque éventuelle :

.....

Problème 1, analyse (obligatoire, 14 points)

On donne la fonction f définie par $f(x) = 2x \cdot \ln(x) - 3x$.

- Déterminer le domaine de définition de f , ainsi que les éventuels zéros de f .
- Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calculer les coordonnées du point à tangente horizontale du graphe de f , puis établir le tableau de variation de f .
- Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x)$.
- Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé de 2 carrés par unité.
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente t au graphe de f , sachant que t est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$.
- Calculer $\int_1^4 f(x) dx$.

Problème 2, algèbre linéaire (obligatoire, 12 points)

Dans ce problème, $B_0 = (e_1, e_2)$, avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Première partie

On considère l'application linéaire f donnée par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 3y \\ 2x + 6y \end{pmatrix}$

- Donner la matrice M de f relative à la base B_0 .
- Montrer que f n'est pas bijective.
- Déterminer le noyau et l'image de f .

Deuxième partie

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R_a = \begin{pmatrix} a & a\sqrt{3} \\ -a\sqrt{3} & a \end{pmatrix}$ relative à la base B_0 .

- Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $\text{Det}(R_a) = 1$? (Det désigne le déterminant.)
- $R_{-\frac{1}{2}}$ est la matrice d'une rotation. Calculer l'angle de cette rotation, puis déterminer le plus petit nombre entier n strictement supérieur à 1 pour lequel $\left(R_{-\frac{1}{2}}\right)^n = R_{-\frac{1}{2}}$.

Troisième partie

On considère l'application linéaire g donnée par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 20 & -17 \end{pmatrix}$ relative à la base B_0 .

- Calculer les valeurs propres de g , puis donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre de g .
- Donner la matrice de g relative à la base $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^2$.

Problème 3, géométrie dans l'espace (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(3;4;4)$ et $D(5;4;-2)$. On appelle α le plan contenant les points A , B et C .

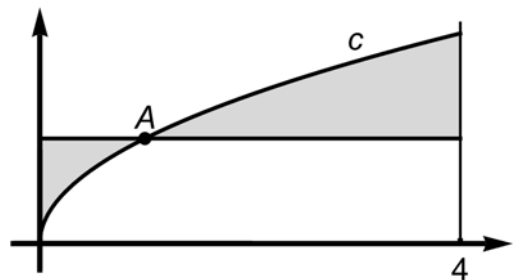
- Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle et calculer son aire.
- Montrer qu'une équation cartésienne du plan α contenant le triangle ABC est $4x + 3y - 3z - 12 = 0$.
- Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
- Le point $A(3;0;0)$ est le symétrique du point $D(5;4;-2)$ par rapport à un plan π . Déterminer une équation cartésienne du plan π .
On considère encore le plan β d'équation $3x - y + 2z - 9 = 0$.
- Déterminer le point P de β qui est le plus proche du point $E(8;-3;5)$.
- Déterminer les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'angle aigu entre le plan β et le plan μ d'équation $x + 2y + k \cdot z = 0$ vaut 60° .

Problème 4, optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

Première partie

Dans un repère orthonormé, on considère :

- La courbe c d'équation $y = \sqrt{x}$ pour $x \in [0;4]$;
- un point A d'abscisse $a \in]0;4[$ situé sur c ;
- la droite horizontale d qui passe par A ;
- le domaine borné D , coloré en gris sur la figure ci-contre, et délimité par c , d et les droites verticales $x = 0$ et $x = 4$.



- Montrer que l'aire S de D peut être exprimée en fonction de $a \in]0;4[$ par

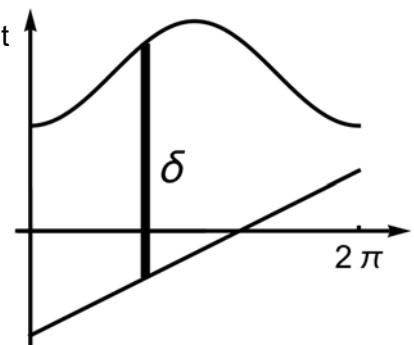
$$S(a) = \frac{2}{3}\sqrt{a^3} - 4\sqrt{a} + \frac{16}{3}.$$

- Calculer la valeur de $a \in]0;4[$ pour laquelle l'aire S de D est minimale.
Justifier que la valeur trouvée correspond bien à un minimum.

Deuxième partie

On considère les fonctions f et g données par $f(x) = 3 - \cos(x)$ et $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

- Déterminer la valeur de l'écart vertical maximal δ entre les courbes qui représentent f et g , tel qu'illustré en gras sur la figure ci-contre.
Justifier que la valeur trouvée correspond bien à un maximum.



Problème 5, probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Cent jeunes ont été sélectionnés pour participer à un concours de mathématiques qui se déroule à Stockholm. Pour faciliter l'organisation, les candidats sont répartis dans trois groupes appelés A, B et C.

- Dans le groupe A, il y a 12 garçons et 18 filles.
- Dans le groupe B, il y a 15 garçons et 20 filles.
- Dans le groupe C, il y a 13 garçons et 22 filles.

Le concours comporte 20 questions et chaque candidat doit répondre à toutes les questions.

D'après les statistiques des années précédentes, on estime qu'un candidat a une probabilité de 82% de répondre correctement à une question. On admet que la probabilité de réussite est identique pour chaque question et indépendante des réponses aux autres questions.

Les candidats ayant obtenu au moins 18 réponses correctes sont qualifiés pour la finale du concours.

- a) Parmi tous ces candidats, de combien de manières différentes peut-on choisir 3 filles et 3 garçons qui apparaîtront sur une photo publicitaire pour la prochaine édition du concours ?
- b) De combien de manières différentes peut-on choisir 4 candidats parmi ces 100 pour répondre à la presse, s'il faut qu'il y ait au moins un candidat de chacun des trois groupes ?
- c) Si l'on sélectionne au hasard 4 candidats du groupe A, quelle est la probabilité que cette sélection contienne plus de filles que de garçons ?
- d) Calculer la probabilité qu'un candidat choisi au hasard ne soit pas qualifié pour la finale.
- e) Ce concours ayant lieu depuis plusieurs décennies, les organisateurs ont pu établir que la répartition des âges des participants (en années) pouvait être modélisée par une loi normale d'écart type $\sigma = 1.412$.
Sachant que 80% des participants avaient moins de 22 ans, déterminer la moyenne de cette loi normale.