



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2024

MATHÉMATIQUES, NIVEAU SUPERIEUR

Candidat-e : Nom

Prénom

Numéro

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre. A la fin de votre examen, vous devez rendre ce document avec votre travail.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus :	Problème 1 :		sur 13 pts
	Problème 2 :		sur 13 pts
	Problème 3 :		sur 12 pts
	Problème 4 :		sur 12 pts
	Problème 5 :		sur 12 pts
	Total :		sur 50 pts

NOTE

Examineur-trice en charge de la correction :

Remarque éventuelle :

.....

Problème 1 : ANALYSE (obligatoire, 13 points)

On considère la fonction donnée par $f(x) = \frac{(1 + 2\ln(x))^2}{x}$.

- 1.1 Déterminer l'ensemble de définition de f , puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- 1.2 Calculer les limites de f lorsque x tend vers 0 et $+\infty$ et donner les équations des éventuelles asymptotes au graphe de f .
- 1.3 Calculer la dérivée de f et montrer qu'elle peut s'écrire $f'(x) = \frac{(1 + 2\ln(x))(3 - 2\ln(x))}{x^2}$.
- 1.4 Etablir le tableau de variation de f et donner les coordonnées des éventuels extremums du graphe de f .
- 1.5 Tracer le graphe de f dans un repère de 2 carrés d'unité.
- 1.6 Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.
- 1.7 Calculer l'aire de la région du plan délimitée par le graphe de f , l'axe des x et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Problème 2 : ALGÈBRE LINÉAIRE (obligatoire, 13 points)

- 2.1 Considérons l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ y - 2a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a cette application f est linéaire.

- 2.2 Considérons l'application linéaire g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.1 Donner la forme explicite de g , c'est-à-dire, donner l'image d'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par g .

2.2.2 Donner le noyau et l'image de g .

2.2.3 Calculer, si elle existe, la matrice de la réciproque de g .

2.2.4 Calculer les éventuelles valeurs propres de g .

2.2.5 Montrer que M peut s'écrire sous la forme $M = R \cdot H$, où R est la matrice d'une rotation dont vous donnerez l'angle α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) et H est la matrice d'une homothétie dont vous donnerez le rapport h . Donner les matrices R et H .

2.2.6 Donner la matrice M^4 , où $M^4 = M \cdot M \cdot M \cdot M$.

Problème 3 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On donne les points $A(4; -14; 6)$, $B(1; 2; 2)$, $C(-8; -1; 5)$ et $E(-3; -1; 1)$.

- 3.1 Déterminer l'équation cartésienne du plan parallèle au plan (ABC) et passant par le point E .
- 3.2 Calculer l'angle aigu formé par le plan (ABC) et la droite (CE) .
- 3.3 Déterminer les équations paramétriques de la droite p qui passe par le point A et qui coupe la droite (BC) à angle droit.
- 3.4 On considère la droite d perpendiculaire au plan (ABC) et passant par A .
Calculer le volume du tétraèdre $(ABCD)$ où D est le point de d de première coordonnée nulle.

Problème 4 : PROBABILITÉS (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

Une urne contient 18 jetons : 3 portent la lettre A, 3 portent la lettre E, 3 portent la lettre I, 3 portent la lettre O, 3 portent la lettre U et 3 portent la lettre Y.

Bertrand joue au jeu suivant : il tire au hasard 6 jetons de l'urne, sans remise.

- 4.1 Bertrand a tiré 2 jetons Y, 2 jetons O et 2 jetons U. Combien de mots différents de six lettres, ayant une signification ou non, peut-il former avec ces lettres ?
- 4.2 Montrer que la probabilité que Bertrand tire 6 voyelles distinctes est égale à 3,93 %.
- 4.3 Calculer la probabilité que Bertrand tire au moins un jeton Y.
- 4.4 Bertrand joue 7 fois à ce jeu. Entre chaque jeu, il remet les 6 jetons tirés dans l'urne. Calculer la probabilité qu'exactly 2 fois il tire 6 voyelles différentes.

Trois joueurs, Bertrand, Christian et Didier, tirent l'un après l'autre 6 jetons de l'urne, sans remise entre les joueurs. Après les tirages, l'urne est donc vide.

- 4.5 Calculer la probabilité que les trois joueurs tirent les mêmes lettres (on ne tient pas compte de l'ordre).

Problème 5 : SUITES (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Maurice, Eugène et Roland décident d'acheter un ordinateur portable. Malheureusement, les temps sont durs et ils ne disposent pas de la somme nécessaire pour régler l'intégralité de leur achat tout de suite.

Patrick, le vendeur, leur propose des facilités de paiement : chacun devra payer un acompte et rembourser son achat selon des modalités qu'il leur propose au choix sur une durée de 12 mois.

Le cas de Maurice

Maurice choisit de verser 150 francs à l'achat comme première mensualité, puis de verser durant chacun des onze mois suivants une mensualité supérieure de 8 francs à celle du mois précédent.

On note u_1 l'acompte versé dans la modalité adoptée par Maurice, donc $u_1 = 150$.

- 5.1 Calculer u_2 et u_3 , les mensualités versées le deuxième et le troisième mois.
- 5.2 Quelle est la nature de la suite (u_n) où u_n désigne le versement effectué le mois n ($1 \leq n \leq 12$) ? On précisera le premier terme et la raison de (u_n) .
- 5.3 Donner une formule permettant de calculer u_n en fonction de n .
- 5.4 Donner une formule permettant de calculer en fonction de n ce que Maurice a déjà remboursé en n mois et en déduire le prix qu'il aura finalement payé son ordinateur.

Le cas d'Eugène

Eugène choisit une autre modalité. Après avoir versé un acompte, il versera durant chacun des onze mois suivants la somme versée le mois précédent diminuée de 5%.

On note v_1 l'acompte versé dans la modalité adoptée par Eugène. Lorsque l'on aura ajouté à cet acompte v_1 les 11 versements suivants, Eugène aura payé en tout 2298,20 francs.

- 5.5 Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- 5.6 Calculer l'acompte v_1 versé par Eugène.

Le cas de Roland

Roland choisit encore une autre modalité de remboursement.

Après avoir payé un acompte de 360 francs, il payera chacun des onze mois suivants un montant diminué de 3% par rapport à celui payé le mois précédent, diminué encore de 24 francs. On notera w_n le montant versé le mois numéro n . Donc, $w_1 = 360$ et $w_{n+1} = 0,97w_n - 24$ ($n \geq 1$).

- 5.7 Considérons maintenant la suite définie par $x_n = w_n + 800$.

Montrer que (x_n) est une suite géométrique de raison $r = 0,97$.

Rappel : il ne suffit pas de montrer que quelques termes sont en progression géométrique pour prouver que toute la suite l'est.

- 5.8 Calculer x_{12} et en déduire w_{12} , le montant versé par Roland le douzième mois.
- 5.9 Considérons maintenant la suite (x_n) **pour tout $n \in \mathbb{N}^*$** .
Calculer la somme infinie de tous les termes de la suite (x_n) .