



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - SESSION D'ÉTÉ 2024

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : Formulaires et tables de la CRM et calculatrice agréés.

Total des points : 50 points

Pour obtenir la note maximale 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Consignes générales

Avant de commencer, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages (4).

Les réponses se font sur du papier libre. A la fin de votre examen, vous devez rendre ce document avec votre travail. Aucune réponse ne doit figurer sur cet énoncé.

La pose de tous les calculs doit figurer sur vos copies et les réponses doivent être justifiées par des calculs ou des explications.

Résultats :

Problème 1 : / 13 points

Problème 2 : / 13 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

NOTE :

Date : Correcteur/trice :

Remarques éventuelles :

.....

Problème 1**Obligatoire - 13 points****ANALYSE**

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}}$.

- a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et les éventuelles intersections de son graphe avec chacun des axes Ox et Oy .
- b) Montrer que la dérivée de f est donnée par $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2} \cdot (1 - \sqrt{x+2})^2}$.
- c) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes au graphe de f .
- d) Étudier la croissance de f .
- e) Déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f au point d'abscisse $x = 2$.
- f) Sur un même repère orthonormé, représenter le graphe de cette fonction f et la tangente t .
- g) Calculer une primitive $F(x)$ de $f(x)$, en vous aidant éventuellement du changement de variable suivant : $u = 1 - \sqrt{x+2}$.

Problème 2**Obligatoire - 13 points****ALGÈBRE LINÉAIRE**

Considérons les applications linéaires f définies par leur matrice $A = \begin{pmatrix} a & a+3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

- a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du nombre a l'application linéaire f n'est pas bijective.
- b) Vérifier que les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de f et en déduire les valeurs propres de f .

On pose $a = 2$. Pour la suite du problème f est donc définie par le matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit une autre application linéaire g par sa matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

- c) Déterminer les valeurs propres de g , puis donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre de g .
- d) Déterminer toutes les valeurs du nombre réel b pour lesquelles le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ b-1 \end{pmatrix}$ et son image $g(\vec{t})$ sont orthogonaux.
- e) Soit l'application linéaire h définie par $h = f - g$.
 - Calculer le noyau de h et l'image de h .
 - Donner une interprétation de $h^2 = h \circ h$.

Problème 3

Au choix avec les problèmes 4 et 5
12 points

PROBABILITÉS

Partie 1

Christian, qui est très gourmand, a acheté un sachet contenant 28 bonbons parfumés. Il y en a 5 à la fraise, 8 au citron et 15 à l'orange. Il en prend ensuite 3 au hasard dans ce sachet.

Calculer la probabilité :

- a) que ces 3 bonbons soient à la fraise ;
- b) que ces 3 bonbons soient à la fraise, s'il a tiré trois bonbons de même parfum ;
- c) que chacun de ces 3 bonbons ait un parfum différent.



Partie 2

Yves est un passionné de tir à l'arc. Il s'entraîne beaucoup, et, à chaque tir, il touche le centre de la cible avec une probabilité de 40 %. Au cours d'une séance d'entraînement, il tire quarante flèches. Les tirs sont supposés indépendants et les conditions sont les mêmes à chaque tir.

- d) Au cours d'une séance, quelle est la probabilité qu'il touche le centre de la cible exactement 9 fois ?

Pour les questions suivantes, utiliser une approximation par la loi normale.

- e) Quelle est la probabilité qu'il touche le centre de la cible au plus 18 fois ?
- f) Quelle est la probabilité qu'il touche le centre 19 fois ou plus ?



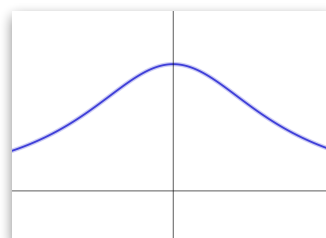
Problème 4

Au choix avec les problèmes 3 et 5
12 points

OPTIMISATION

Partie 1

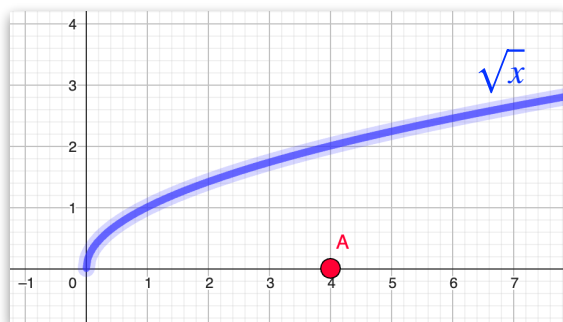
Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$. Son graphe est représenté ci-contre :



Déterminer parmi toutes les droites tangentes au graphe de f celle dont la pente est maximale. Justifier que cette pente est bien maximale.

Partie 2

On donne la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer les deux coordonnées du point P situé sur le graphe de g qui est le plus proche du point $A(4;0)$. Montrer qu'il s'agit bien du point du graphe de g le plus proche du point A .



Problème 5

Au choix avec les problèmes 3 et 4
12 points

GÉOMÉTRIE
DANS
L'ESPACE

On donne le plan π d'équation $2x + y + 2z - 8 = 0$,

ainsi que la droite d d'équations
$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a) Calculer l'angle aigu φ formé par le plan π et la droite d .
- b) Trouver les coordonnées des deux points de la droite d situés à distance 5 du plan π .
- c) Déterminer une équation cartésienne du plan α parallèle à l'axe Oy et contenant la droite d .
- d) Déterminer des équations paramétriques de la droite h qui est contenue dans le plan π et dont chacun des points a une troisième coordonnée égale à 3.
- e) On fait tourner le point $P(2; -3; 1)$ autour de la droite d , dans un plan perpendiculaire à cette droite au moyen d'une rotation. L'angle de la rotation est de 180° .
Déterminer les coordonnées du point P' qui est l'image de P par cette rotation.

* * * * *