



Examen suisse de maturité, session d'été 2023

MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE, NIVEAU SUPÉRIEUR

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Consignes générales

Avant de débuter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font uniquement sur papier libre. A la fin de votre examen, vous devez rendre ce document avec votre travail.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus :

Problème 1 : / 13 points

Problème 2 : / 13 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

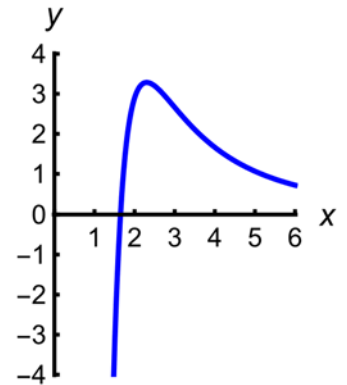
Note

Examineur(s)-trice(s) en charge de la correction :

Remarque éventuelle :

Problème 1, analyse (obligatoire, 13 points)

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \frac{120\ln(x) - 60}{x^3}$ ainsi que son graphe représenté ci-contre.



- Déterminer le domaine de définition de f et le zéro de f .
- Déterminer les équations des asymptotes au graphe de f . Justifier les réponses.
- Calculer la dérivée de f et établir son tableau de variation. Calculer également les coordonnées du maximum.
- Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse e .
- Calculer $\int_{\sqrt{e}}^{e^2} f(x) dx$. **Indication** : employer l'intégration par parties.

Problème 2, nombres complexes (obligatoire, 13 points)

On donne les fonctions polynomiales complexes d et t définies par $d(z) = z^2 + 2iz + 8$ et $t(z) = z^3 + 5iz^2 + 2z + 24i$.

- Déterminer les zéros de ces fonctions, sachant que les zéros de d sont également des zéros de t . Donner les solutions sous forme algébrique $(x + yi)$.
- Résoudre l'équation $z^4 + 2iz^2 + 8 = 0$, donner les solutions sous forme trigonométrique.
- Déterminer la fonction polynomiale du deuxième degré f qui a les mêmes zéros que d et telle que $f(1-i) = 1-i$.
- Déterminer le nombre complexe w tel que la fonction polynomiale du deuxième degré g , définie par $g(z) = d(z) + w$, possède un zéro unique. Donner ce zéro.
- Dans le plan de Gauss, déterminer et décrire de manière précise l'image par d de l'axe imaginaire.

Problème 3, géométrie dans l'espace (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On donne les points $A(7;3;2)$, $B(3;7;4)$ et $C(3;-1;8)$, ainsi que le plan $\pi : 2x + y + 2z - 6 = 0$.
On appelle d la droite passant par les points A et C .

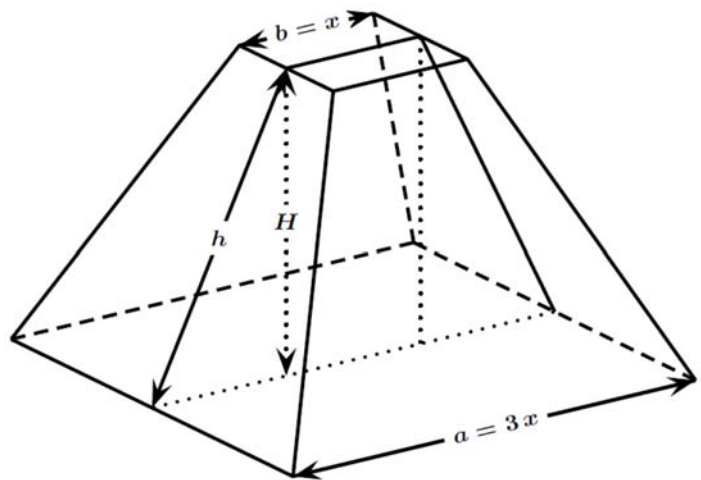
- Calculer la valeur de l'angle de sommet B du triangle ABC .
- Déterminer les coordonnées du point D de la droite d de manière que l'angle de sommet B du triangle ABD soit droit.
- Calculer l'aire du triangle ABC .
- Montrer que le triangle ABC est contenu dans un plan parallèle à π et calculer la distance entre ces deux plans.
- Calculer la distance entre la droite d et l'axe Ox .

Problème 4, optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On considère un tronc de pyramide régulière à base carrée de hauteur H (figure ci-contre).

Les faces latérales sont des trapèzes isométriques de hauteur h .

La longueur a du côté du carré de la base inférieure est le triple de la longueur b du côté du carré de la base supérieure. Posons $a = 3x$ et $b = x$.


Indications

- Le volume d'un tronc de pyramide à base carrée est donné par $V = \frac{H}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, où H est la hauteur du tronc de pyramide, a et b les longueurs respectives des côtés des carrés constituant les bases.
- L'aire d'un trapèze est donnée par $A_{\text{trapèze}} = \frac{1}{2}(a + b)h$ où h est la hauteur du trapèze, a et b les longueurs respectives de la grande et de la petite base.

- Exprimer le volume V et l'aire latérale totale A_{lat} du tronc de pyramide en fonction de x et de la hauteur H .

Pour la suite du problème, on considère que le volume V du tronc de pyramide est égal à

$$V = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

- En déduire que l'aire latérale totale du tronc de pyramide peut s'exprimer en fonction de x comme suit : $A_{\text{lat}}(x) = 8 \cdot \sqrt{x^4 + \frac{2}{x^2}}$.
- Déterminer x de façon que l'aire latérale totale $A_{\text{lat}}(x)$ soit extrémale. Est-elle alors minimale ou maximale ? Justifier la réponse.

Problème 5, probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Pour s'assurer que son parc informatique est en bon état, le collège des Edelweiss fait contrôler tous ses ordinateurs durant les vacances d'été. Il se trouve que 20% de ses ordinateurs sont encore sous garantie.

La probabilité qu'un ordinateur sous garantie soit défectueux est de 0,5 %, et pour ceux qui ne sont plus sous garantie et donc plus anciens, cette probabilité est de 2,5 %.

Le technicien qui vient contrôler ces ordinateurs en prend un au hasard dans l'école.

- a) Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit sous garantie et défectueux.
- b) Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit défectueux.
- c) Si l'ordinateur choisi est défectueux, montrer que la probabilité qu'il soit sous garantie est de $\frac{1}{21}$.
- d) Au cours du contrôle, le technicien a trouvé 5 ordinateurs défectueux.
Calculer la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit encore sous garantie.
- e) Après avoir vidé la salle 34 pour le nettoyage d'été, le responsable technique de l'école doit y remettre douze ordinateurs numérotés de 1 à 12 sur les douze pupitres situés le long du mur au fond de la salle. Si seuls les ordinateurs numérotés de 1 à 6 sont sous garantie, de combien de manières différentes peut-il disposer ces douze ordinateurs pour qu'il y ait en alternance un ordinateur sous garantie et un qui ne l'est plus ?
- f) Pendant une leçon de 45 minutes, le temps d'utilisation d'un ordinateur par les élèves de première année suit une loi normale de moyenne 34 minutes et d'écart-type 8 minutes. Calculer la probabilité que Julien, élève de première année, utilise l'ordinateur qui est devant lui entre 32 et 37 minutes durant la première leçon de cours lundi.
- g) En deuxième année, le temps d'utilisation des élèves durant une leçon suit également une loi normale, d'écart-type égal à 7 minutes. Sachant que la probabilité que François, élève de deuxième année, utilise l'ordinateur plus de 38 minutes vaut 5 %, calculer la moyenne de cette loi normale.