



## Examen suisse de maturité, session d'hiver 2022

### MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau supérieur

Candidat-e : Nom : ..... Prénom : ..... Numéro : .....

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : ..... sur 14

Problème 2 : ..... sur 10

Problème 3 : ..... sur 13

Problème 4 : ..... sur 13

Problème 5 : ..... sur 13

Total : ..... sur 50 **Note : .....**

Examineur-trice : .....

#### Problème 1 : Analyse (obligatoire, 14 points)

On donne la fonction  $f$  définie par  $f(x) = a \ln(x) - \ln^2(x)$ .

- a) Déterminer la valeur du réel  $a$ , sachant que la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation  $12x - 3y + 1 = 0$ .

Pour la suite du problème, on pose  $a = 2$ . Donc,  $f(x) = 2 \ln(x) - \ln^2(x)$ . On donne également la dérivée seconde de  $f$ ,  $f''(x) = -\frac{2}{x^2}(2 - \ln(x))$ .

- b) Etudier la fonction  $f$ . On demande : domaine de définition de  $f$ , intersections éventuelles du graphe de  $f$  avec les axes  $Ox$  et  $Oy$ , tableau des signes de  $f$ , équation des éventuelles asymptotes au graphe de  $f$ , étude de la croissance de  $f$  par un tableau des variations, coordonnées des extremums et coordonnées du point d'inflexion, représentation du graphe de  $f$  avec une unité égale à deux carreaux.
- c) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $e^2$ .
- d) Prouver que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = 4x \left( \ln(x) - \frac{1}{4} \ln^2(x) - 1 \right)$  est une primitive de la fonction  $f$ .
- e) Calculer l'aire du domaine compris entre le graphe de  $f$  et l'axe des  $x$  sur l'intervalle  $[1; e^2]$ .

**Problème 2 : Géométrie plane** (obligatoire, 10 points)

On donne les points  $A(1; -5)$  et  $B(7; -3)$ , la droite  $t : 3x + y - 18 = 0$  et le cercle

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 38 = 0.$$

- Donner une équation cartésienne de la droite  $d$  qui passe par  $A$  et  $B$ .
- Soit  $\Gamma_2$  le cercle dont  $[AB]$  est un diamètre. Vérifier que  $C_2(4; -4)$  est le centre de  $\Gamma_2$  et que  $\sqrt{10}$  est son rayon.
- Vérifier que la droite  $t$  est tangente au cercle  $\Gamma_2$  en  $B$ .
- Vérifier que  $C_1(-1; 1)$  est le centre de  $\Gamma_1$  et que  $\sqrt{40}$  est le rayon de  $\Gamma_1$ .
- La droite  $t$  est-elle tangente au cercle  $\Gamma_1$  ? Justifier la réponse.
- Prouver que le point  $\Omega(2; 2)$  est le centre d'un cercle tangent intérieurement à  $\Gamma_1$  et extérieurement à  $\Gamma_2$ . On précisera l'équation de ce cercle.

**Problème 3 : Probabilités** (à choix avec les problèmes 4 et 5, 13 points)

Sur un dé normal à six faces, Gaston a remplacé le 6 par un 5.

Les faces du dé sont donc 1, 2, 3, 4, 5 et 5.

- Gaston lance son dé trois fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins un « 1 » ?
- Gaston lance son dé deux fois. Sachant que la somme des points obtenus vaut 8, calculer la probabilité qu'il ait obtenu une fois le « 3 ».

Gaston a rendez-vous avec son ami Jules pour une partie de dés. Gaston est toujours ponctuel, ce qui n'est pas le cas de Jules, qui est souvent en retard.

Soit  $h_1$  l'heure d'arrivée de Gaston et  $h_2$  l'heure d'arrivée de Jules. La différence  $h_2 - h_1$ , exprimée en minutes, est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi normale de moyenne 4 minutes et d'écart-type 2 minutes.

- Quelle est la probabilité que Gaston doive attendre entre 5 et 6 minutes ?
- Quelle est la probabilité que Jules arrive avant Gaston ?

Jules arrive avec son dé traditionnel à six faces numérotées de 1 à 6 et Gaston avec son dé truqué. Gaston et Jules mettent leur dé dans un même sac.

- Gaston tire au hasard un dé dans le sac, le lance une fois et obtient « 5 ». Quelle est la probabilité qu'il ait tiré le dé de Jules ?

Gaston propose le jeu suivant à Jules : tu prends au hasard un dé dans le sac et tu le lances. Si tu obtiens un « 5 », tu me donnes  $m$  francs, si tu obtiens un « 4 » tu me donnes un franc et dans les autres cas je te donne deux francs.

- Déterminer  $m$  pour que ce jeu soit équitable.

**Problème 4 : Géométrie de l'espace** (à choix avec les problèmes 3 et 5, 13 points)

On donne le plan  $\alpha : 2x + 3y + 4z = 24$  et la droite  $d : \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 13 - 9k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$ .

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection  $A$ ,  $B$  et  $C$  du plan  $\alpha$  avec les axes,  $A$  étant sur  $Ox$ ,  $B$  sur  $Oy$  et  $C$  sur  $Oz$ .
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite  $d$  avec le plan  $\alpha$ .
- Le plan  $\alpha$  et les plans  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$ , où  $O$  est l'origine du repère, délimitent un tétraèdre  $OABC$ . Calculer l'aire de la face  $ABC$  de ce tétraèdre.
- Calculer le volume du tétraèdre  $OABC$ .
- Déterminer les coordonnées des points de  $d$  situés à la distance  $\sqrt{29}$  du plan  $\alpha$ .
- Montrer que la droite  $d' : \begin{cases} x = 7 + 5k \\ y = -2 - 6k \\ z = 4 + 2k \end{cases}$  est la projection orthogonale de la droite  $d$  sur le plan  $\alpha$ .

**Problème 5 : Suites** (à choix avec les problèmes 3 et 4, 13 points)

Considérons deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , dont les premiers termes sont respectivement  $u_0 = 60$  et

$v_0 = 20$ , définies ainsi pour tout nombre  $n$  entier strictement positif :  $\begin{cases} u_{n+1} = 0,8u_n + 0,2v_n \\ v_{n+1} = 0,2u_n + 0,8v_n \end{cases}$ .

- Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ , ainsi que  $v_1$ ,  $v_2$ .
- Démontrer par récurrence que la somme  $u_n + v_n$  est constante.
- Montrer que la suite  $(w_n)$  définie par la relation  $w_n = u_n - v_n$  est géométrique.  
Donner son premier terme  $w_0$  et calculer sa raison. En déduire que  $w_n = 40 \cdot 0,6^n$ .
- Montrer que  $u_n = 40 + 20 \cdot 0,6^n$ , puis calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .