



Examen suisse de maturité, session d'été 2022

MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau supérieur

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : sur 11

Problème 2 : sur 13

Problème 3 : sur 13

Problème 4 : sur 13

Problème 5 : sur 13

Total : sur 50 **Note** :

Examineur-trice :

Problème 1

Obligatoire (11 pts)

ANALYSE

Considérons la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 - 2x}$ et dont la dérivée est $f'(x) = \frac{2 - 2x}{x^2(x - 2)^2}$.

- a) Etudier la fonction f , en traitant les points suivants :
- domaine de définition de f ;
 - intersections du graphe de f avec les axes Ox et Oy ;
 - équations des éventuelles asymptotes au graphe de f ;
 - domaines de croissance/décroissance et coordonnées des éventuels extremums;
 - représentation graphique de f ; les éventuels extremums et asymptotes doivent figurer clairement sur ce graphique.
- b) Etablir l'équation de la droite d tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 3$.
Ne pas la représenter.
- c) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2}$ et donner leur valeur.
- d) Calculer l'aire du domaine compris entre le graphe de f et l'axe Ox pour des valeurs de x comprises entre 4 et 6.
Si vous n'avez pas trouvé les valeurs de a et b à la question précédente c), prenez $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$.

Problème 2

Obligatoire (13 pts)

PROBABILITÉS

Trois amis, Alain, Bob et Carlos, se retrouvent pour une soirée de jeux.

Pour le **premier jeu**, ils disposent de 6 cartes: 2 jaunes, 2 rouges et 2 bleues.

Elles sont mélangées et retournées sur une table, face de couleur cachée.

Alain tire une carte et la garde. Si elle est jaune, il gagne et le jeu s'arrête.

Sinon, Bob tire une carte et la garde. Si elle est rouge, il gagne et le jeu s'arrête.

Sinon, Carlos tire à son tour une carte. Si elle est bleue, il gagne et le jeu s'arrête.

Sinon, le jeu s'arrête et personne ne gagne.

- Représenter les déroulements possibles de ce jeu à l'aide d'un arbre de probabilités.
- Calculer la probabilité qu'Alain gagne ce jeu, la probabilité que Bob gagne ce jeu et la probabilité que Carlos gagne ce jeu. Déterminer enfin la probabilité que personne ne gagne ce jeu.
- Calculer la probabilité que Bob ne gagne pas, sachant qu'Alain n'a pas gagné.

La soirée avance et après plusieurs parties de ce jeu, Carlos quitte ses amis. Alain et Bob décident alors de jouer à un **deuxième jeu**, où chacun lance un dé à six faces, une seule fois.

- Si Bob obtient un nombre supérieur à celui d'Alain, Alain donne à Bob en francs le carré du nombre obtenu par Bob.

Par exemple, si Bob obtient 4 et Alain 1, 2 ou 3, Alain donne $4^2 = 16$ francs à Bob.

- Si Alain obtient un nombre supérieur à celui de Bob, Bob donne 20 francs à Alain.

- Si Alain et Bob obtiennent le même nombre, personne ne gagne.



- Expliquer pourquoi ce jeu n'est pas équitable en calculant l'espérance de gain de Bob.

Plus tard encore, Alain se retrouvant seul décide de jouer à un **troisième jeu**. Il tire, sans remise, deux cartes au hasard d'un jeu contenant uniquement cinq cartes, dont trois de valeur 1 et deux de valeur 2.

- On considère la variable aléatoire X qui indique la somme des points obtenus sur les deux cartes tirées. Calculer la moyenne et l'écart-type de X .
- Souffrant d'insomnie, Alain réalise 100 fois ce tirage, en remettant chaque fois les deux cartes tirées dans le paquet. Calculer la probabilité qu'il obtienne plus de 34 fois une somme de 2 points exactement. Utiliser pour cela une approximation de la loi binomiale par la loi normale.

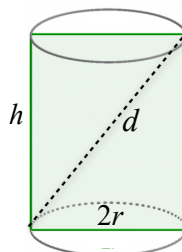
Problème 3

Au choix avec les
problèmes 4 et 5 (13 pts)

OPTIMISATION

On considère un cylindre droit de rayon r et de hauteur h .

L'intersection de ce cylindre avec un plan contenant l'axe du cylindre forme un rectangle dont les diagonales sont de longueur d .



- Parmi tous les cylindres droits ayant même diagonale de longueur $d = 3$, déterminer le rayon r et la hauteur h de celui dont le volume est maximal. Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.
- Parmi tous les cylindres droits ayant même diagonale de longueur $d = 3$, déterminer le rayon r et la hauteur h de celui dont l'aire latérale est maximale. Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.

Problème 4

Au choix avec les
problèmes 3 et 5 (13 pts)

ALGÈBRE LINÉAIRE

On donne deux applications linéaires f et g définies relativement à une base $\mathbf{B} = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ par leurs matrices respectives $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Donner la préimage du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ par l'application linéaire f .
- Calculer la matrice M de $f \circ g$. L'application $f \circ g$ est-elle bijective ?
- Soit l'application linéaire h définie par $h = f - g$.
Montrer que l'image et le noyau de h coïncident, c'est-à-dire que $\text{Im}(h) = \text{Ker}(h)$.
Que peut-on dire de l'application $h^2 = h \circ h$?
- Déterminer les valeurs propres de f , puis donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre.
Donner la matrice de f dans la base $\mathbf{E} = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\}$ où $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs propres de f que l'on précisera.
- Montrer que le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ est à la fois un vecteur propre de f et de g .
- Déterminer les valeurs de z pour lesquelles le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de g .

Problème 5

Au choix avec les
problèmes 3 et 4 (13 pts)

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

On donne le plan π d'équation $16x - 12y - 15z - 105 = 0$, le point $A(-7; 9; 20)$,

ainsi que la droite d d'équations
$$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 10 - \lambda \\ z = 7 + 4\lambda \end{cases}, \text{ où } \lambda \in \mathbf{R}.$$

- Prouver que la droite d est parallèle au plan π et calculer la distance entre cette droite et ce plan.
- Calculer l'angle aigu θ formé par le plan π et le plan $\gamma : 8x + 15y - 23 = 0$.
- Trouver le point S qui est le symétrique du point A par rapport au plan π .
- Trouver le point D de la droite d le plus proche du point A .
- Calculer la distance entre la droite d et le point A .
- Trouver un vecteur directeur des droites horizontales contenues dans le plan π .
Note : une droite est dite horizontale si elle est parallèle au plan contenant les axes Ox et Oy .
- Trouver un point P sur l'axe Oz tel que la droite passant par les points A et P soit parallèle au plan π .

* * * * *