



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - HIVER 2021

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Problème 1 :	/ 12 points
Problème 2 :	/ 14 points
Problème 3 :	/ 12 points
Problème 4 :	/ 12 points
Problème 5 :	/ 12 points
Total :	/ 50 points

Candidat :

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :
— les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
— puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur : Date : Signature : Note :

Problème 1 : Analyse (obligatoire, 12 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2}{x^3 - 8}$.

- Établir le tableau des signes de f et donner l'équation de toutes les asymptotes au graphe de f .
- Calculer la dérivée de f , puis montrer qu'elle peut être écrite sous la forme

$$f'(x) = \frac{-6x(x+2)(x^2 - 2x + 8)}{(x^3 - 8)^2}.$$

- À l'aide d'un tableau, étudier la croissance de f en précisant les coordonnées des extremums du graphe de f .

- d) Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé en choisissant une unité égale à deux carreaux. Faire figurer les asymptotes.
- e) Donner l'équation de la tangente t_1 au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$.

On considère maintenant la fonction g définie par $g(x) = \frac{6x^2}{x^3 - 8}$.

- f) Calculer $\int_0^1 g(x) dx$.

Problème 2 : Probabilités (obligatoire, 14 points)

Gaston possède une boîte qui contient 10 pièces de 5 francs.

Il y a trois sortes de pièces : 5 pièces normales, 2 pièces truquées qui présentent face des deux côtés et 3 pièces truquées qui présentent pile des deux côtés.

- a) Gaston prend au hasard une pièce de sa boîte et la lance.
Montrer que la probabilité que face apparaisse vaut $\frac{9}{20}$.
- b) Gaston prend au hasard une pièce de sa boîte et la lance. La pièce présente le côté pile. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?
- c) Gaston prend au hasard une pièce de sa boîte et la lance 10 fois de suite. Quelle est la probabilité que face apparaisse exactement 2 fois ?

Gaston sépare ses pièces en deux groupes : les pièces normales et les pièces truquées.

- d) Il prend les 5 pièces normales et les lance. Quelle est la probabilité qu'au moins une des pièces présente face ?
- e) Il prend sans les regarder les 5 pièces truquées et les aligne devant lui. Quelle est la probabilité que les deux pièces qui présentent face des deux côtés ne soient pas voisines ?

Gaston remet toutes les pièces dans sa boîte et prend au hasard 2 pièces.

- f) Quelle est la probabilité que les 2 pièces soient de la même sorte ? On rappelle qu'il y a 3 sortes de pièces.

Gaston remet encore une fois toutes les pièces dans la boîte pour l'expérience suivante :

Il prend au hasard une pièce qu'il lance. Il regarde si la pièce présente pile ou face et la remet dans la boîte.

Si la pièce a montré le côté pile, il répète l'expérience. Sinon, il l'arrête.

Appelons X le nombre de lancers nécessaire pour obtenir face. Nous savons déjà [voir a)] que $P(X = 1) = \frac{9}{20}$.

- g) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

Problème 3 : Géométrie dans l'espace (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On donne les points $A(0; 3; -2)$, $B(1; 2; 2)$, $C(-3; 1; 5)$ et $D(12; -3; 5)$.

- a) Calculer l'aire du triangle ABC .
- b) Calculer l'angle formé par le plan (ABC) et la droite (AD) .
- c) Déterminer les coordonnées du point E de la droite (AB) qui est le plus proche du point C .
- d) Prouver qu'il n'existe pas de point F de la droite (CD) tel que le triangle ABF soit rectangle en F .
- e) Prouver que les droites (AB) et (CD) sont gauches.
- f) Déterminer l'équation cartésienne du plan α tel que tous les points des droites (AB) et (CD) soient équidistants de ce plan.

Problème 4 : Algèbre linéaire (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}$ relativement à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- a) Existe-t-il un nombre a pour lequel $f(2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$? Si oui, donner ce nombre.
- b) Pour quelle(s) valeur(s) de a l'application f est-elle bijective?
- c) Montrer que le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f pour tout $a \in \mathbb{R}$. Donner la valeur propre associée au vecteur propre $\vec{v}$.
- d) Pour $a = -\frac{1}{2}$, on a $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en donner une interprétation géométrique.

Pour la suite du problème, on pose $a = 3$. Donc, f est définie par la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- e) Déterminer les valeurs propres de f . Donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre.
- f) Donner la matrice de l'application réciproque de f .
- g) Déterminer le vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Problème 5 : Suites (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Rappel : Il ne suffit pas de montrer que quelques premiers termes d'une suite forment une progression arithmétique/géométrique pour montrer que toute la suite est bien arithmétique/géométrique.

Considérons la suite (u_n) , définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \text{ et pour tout nombre } n > 0, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

- a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- b) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Pour tout nombre entier $n > 0$, u_n est strictement positif. »
(Justifier la réponse.)

Pour tout entier naturel n , on définit une nouvelle suite (v_n) par : $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- c) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, en précisant la valeur de son premier terme v_0 et sa raison.
- d) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n .

On définit une nouvelle suite (w_n) par :

$$w_n = 2^{-1-2^n}, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- e) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$, en précisant la valeur de son premier terme w_0 .
- f) Quel est le premier terme de cette suite qui est strictement inférieur à 10^{-25} ?
- g) Cette suite (w_n) converge-t-elle ? Si oui, que vaut sa limite ?
- h) Que vaut la somme infinie des termes de cette suite (w_n) ?