



Examen suisse de maturité, session d'été 2021
Mathématiques, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom : Prénom : Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : / 14 points

Problème 2 : / 12 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

Note :

Correcteur-trice :

Date :

Signature :

Problème 1, analyse (obligatoire, 14 points)

On considère la fonction $f(x) = (2x^2 + ax - a^2) \cdot e^{-x}$, où a est un nombre réel non nul ($a \in \mathbb{R}^*$).

- Vérifier que pour toute valeur de a le graphe de f coupe l'axe des abscisses en deux points. Calculer les abscisses de chacun de ces points.
- Vérifier également que pour toute valeur de a le graphe de f possède deux points à tangente horizontale. Les coordonnées des points à tangente horizontale ne sont pas demandées.

Pour la suite du problème, on choisit $a = 1$, donc $f(x) = (2x^2 + x - 1) \cdot e^{-x}$.

- Étudier la fonction f . On demande : domaine de définition, points d'intersection du graphe et des axes, tableau des signes, équation des éventuelles asymptotes, coordonnées des extremums, tableau de variation, représentation graphique avec une unité égale à deux carreaux.
- En observant le graphe de f , déterminer toutes les valeurs de k ($k \in \mathbb{R}$) pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ possède une seule solution.
- Calculer l'aire du domaine situé entre le graphe de f et la partie de l'axe Ox comprise entre les deux zéros de f .

Problème 2, algèbre linéaire (obligatoire, 12 points)

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & x \\ -x & 5 \end{pmatrix}$ relativement à une base orthonormée $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, où x est un paramètre réel.

- a) Donner les valeurs de x pour lesquelles l'application f n'est pas inversible.
- b) Calculer la matrice de $f^2 = f \circ f$ et donner une interprétation géométrique de f^2 selon les valeurs de x .
- c) Trouver l'unique valeur de x pour laquelle le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f .

Pour la suite du problème, on pose $x = 4$. Donc, f est définie par la matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

- d) Déterminer les valeurs propres de f . Donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre.
- e) Déterminer toutes les valeurs du nombre b de sorte que le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ et son image $f(\vec{t})$ soient orthogonaux.

Problème 3, nombres complexes (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On donne la fonction complexe f définie par $f(z) = \frac{1}{2}iz^3$.

- a) Déterminer les points invariants de f (les solutions de l'équation $f(z) = z$).
- b) Résoudre l'équation $f(z) = z^2$.
- c) Résoudre l'équation $f(z) = 4$. Donner les solutions sous forme trigonométrique.
- d) Montrer que dans le plan de Gauss l'image par f de l'axe imaginaire est **tout** l'axe réel.
- e) Dans le plan de Gauss, les nombres de la forme $z = k \cdot (1+i)$ avec $k \in \mathbb{R}$ définissent une droite d .
Donner une équation cartésienne de cette droite, puis montrer que l'image par f de la droite d est cette même droite d .
- f) Déterminer l'expression de la fonction complexe $f \circ f$. Donner la réponse sous une forme analogue à la définition de f au début du problème.

Problème 4, géométrie de l'espace (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On considère les points $A(9;0;0)$, $B(3;6;3)$ et $C(3;12;0)$. Ces points, non alignés, sont contenus dans le plan α dont une équation cartésienne est $2x + y + 2z - 18 = 0$.

- a) Calculer l'aire du triangle ABC .
- b) Calculer l'angle aigu φ formé par le plan α et l'axe Oz .
- c) Déterminer les coordonnées du point P qui appartient au plan α et qui est le plus proche de l'origine $O(0;0;0)$.
- d) On appelle Γ le cercle contenu dans le plan α , centré en $C(3;12;0)$ et tangent à la droite (AB) .
Calculer le rayon de Γ .
- e) Déterminer les points D et E , de troisième coordonnée négative, tels que le quadrilatère $ABDE$ soit un carré contenu dans le plan α .
- f) On considère encore le plan β d'équation $x + z - 5 = 0$ et on appelle i la droite d'intersection des plans α et β . Déterminer les coordonnées du point T de i dont la troisième coordonnée est nulle, puis trouver des équations paramétriques de la droite i .

Problème 5, probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Note : il n'est pas nécessaire d'avoir traité une partie pour répondre aux autres.

Partie I : problème de défauts

Un téléphone portable fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux problèmes bien différents : une batterie très vite hors d'usage ou un écran mal serti dans le téléphone.

On a constaté que 9% des appareils présentent le défaut lié à la batterie, 7% celui lié à l'écran, 3% des appareils présentent les deux défauts simultanément.

Christian achète l'un des appareils produits.

- a) Quelle est la probabilité que l'appareil soit sans défaut ?
- b) Quelle est la probabilité que l'appareil ne présente que le défaut de batterie ?
- c) Si l'appareil présente le défaut lié à l'écran, quelle est la probabilité qu'il présente aussi l'autre défaut ?

Bertrand achète 7 téléphones de ce modèle, de 7 couleurs différentes (pour pouvoir changer de couleur tous les jours de la semaine).

- d) Calculer la probabilité qu'au moins 2 de ces téléphones présentent un problème d'écran.

Partie II : problème de couleurs

Dans la classe de 23 élèves de François, 7 élèves ont acheté un téléphone rouge, 6 un téléphone jaune et 10 un téléphone bleu.

- e) Si l'on choisit 9 élèves au hasard dans cette classe, quelle est la probabilité que 3 possèdent un téléphone rouge, 3 un téléphone jaune et 3 un téléphone bleu ?
- f) Avant l'épreuve de mathématiques, le maître demande à tous les élèves de déposer leur téléphone portable sur son bureau, afin d'éviter des tentatives de fraude. À la fin de l'épreuve, il commence par rendre les 7 téléphones rouges à ses élèves. Pour cela il demande aux 7 détenteurs d'un appareil de cette couleur de lever la main et il leur remet un téléphone rouge au hasard. Quelle est la probabilité que chacun de ces 7 élèves reçoive bien son propre téléphone ?

Partie III : problème de messages

Dans un pays, le nombre de SMS (courts messages textuels) envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 650$.

- g) Calculer la probabilité qu'un adolescent envoie plus de 4000 SMS en un mois.
- h) La probabilité qu'un adolescent envoie moins de M messages en un mois est de 60 %.
Déterminer la valeur de ce nombre M , en l'arrondissant à l'unité.