



## Examen suisse de maturité, session d'hiver 2020

### MATHEMATIQUES, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : / 12 points

Problème 2 : / 12 points

Problème 3 : / 13 points

Problème 4 : / 13 points

Problème 5 : / 13 points

Total : / 50 points

Note :

Correcteur :

Date :

Signature :

#### Problème 1, analyse (obligatoire, 12 points)

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ .

- Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
- Déterminer les équations des éventuelles asymptotes au graphe de  $f$ .
- Montrer que la fonction dérivée de  $f$  est donnée par  $f'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$ .

et étudier la croissance de  $f$ .

- Calculer la dérivée seconde de  $f$  et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion du graphe de  $f$ .
- Représenter le graphe de  $f$  dans un repère orthonormé.
- Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en son point d'abscisse 0.
- Calculer l'intégrale  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ .

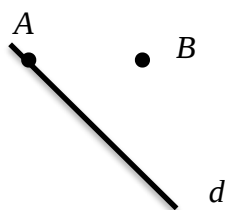
**Problème 2, géométrie plane** (obligatoire, 12 points)

On donne les points  $P(0; -6)$  et  $E(8; -8)$ , les droites  $a: 3x - y + 10 = 0$  et  $b: 3x + y + 8 = 0$  ainsi que le cercle  $\Gamma: x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$ .

- Donner l'équation du cercle  $\Gamma^*$  dont le segment  $[PE]$  est un diamètre.
- Déterminer les coordonnées du centre  $C$  et le rayon  $r$  du cercle  $\Gamma$ .
- Prouver par un calcul que la droite  $a$  est tangente au cercle  $\Gamma$ .
- Vérifier que le point  $P$  est sur le cercle  $\Gamma$  et donner l'équation de la tangente  $t$  à  $\Gamma$  au point  $P$ .
- Donner l'équation de la tangente à  $\Gamma$ , parallèle à la droite  $a$ .
- Déterminer les équations des bissectrices des droites  $a$  et  $b$ .
- Donner les coordonnées du centre du cercle tangent à la droite  $a$  au point  $A(-6; -8)$  sachant que ce centre est sur la verticale d'équation  $x = -3$ .

**Problème 3, géométrie de l'espace** (à choix avec les problèmes 4 et 5, 13 points)

On considère la droite  $d: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 3 + 2k \\ z = 2 + k \end{cases}$  et les points  $A(24; 25; 13)$  et  $B(30; -5; -20)$ .



- Montrer que  $A$  appartient à la droite  $d$  et que  $B$  n'appartient pas à la droite  $d$ .
- On considère le plan  $\beta$  qui contient le point  $B$  et la droite  $d$ . Donner une équation cartésienne de  $\beta$  et vérifier que  $\beta$  passe par l'origine.
- En calculant un angle, montrer qu'il n'est pas possible de trouver un point  $C$  de la droite  $d$  tel que le triangle  $ABC$  soit équilatéral.
- On considère un point  $P$  de la droite  $d$ . Déterminer ses coordonnées s'il s'agit du point le plus proche de  $B$ .
- On considère un point  $D$  de la droite  $d$ . Déterminer ses coordonnées pour que le triangle  $ABD$  soit isocèle au sommet  $B$ .
- Sans faire de calculs, expliquer la marche à suivre pour trouver le point  $E$  de la droite  $d$  de sorte que le triangle  $ABE$  soit isocèle au sommet  $E$ .

**Problème 4, nombres complexes** (à choix avec les problèmes 3 et 5, 13 points)

On considère la fonction complexe  $f$  définie par  $f(z) = (1+i)z + 4 - i$ .

- a) Déterminer le zéro de  $f$ . Donner la réponse sous la forme  $x + yi$ .
- b) Donner une interprétation géométrique de cette fonction dans le plan de Gauss.
- c) Déterminer le point invariant de  $f$  (la solution de l'équation  $f(z) = z$ ). En déduire une interprétation géométrique de  $f$  ne faisant pas intervenir de translation.
- d) Déterminer l'expression de la fonction  $f \circ f$ . Donner le point invariant de  $f \circ f$ .
- e) Déterminer l'expression de la fonction réciproque de  $f$ .
- f) Résoudre l'équation  $f(z^2) = 3f(z)$ .

**Problème 5, probabilités** (à choix avec les problèmes 3 et 4, 13 points)

Un stage de surf est organisé tous les ans pour un groupe de jeunes fribourgeois dans la région de Biarritz, élégante ville balnéaire au bord de l'océan Atlantique. Cette année, les organisateurs ont reçu 27 inscriptions, dont les deux tiers viennent de jeunes filles. Il n'y a hélas, à Biarritz, que 18 chambres individuelles disponibles pour loger ces sportifs : 12 pour les jeunes filles au premier étage du bâtiment et 6 pour les jeunes hommes au rez-de-chaussée. Il n'est pas possible de changer le nombre de jeunes filles et de jeunes hommes qui peuvent être ainsi logés.

- a) De combien de manières différentes les organisateurs peuvent-ils choisir les 18 jeunes qui participeront à ce stage ?
- b) Fred et Mathieu se sont inscrits pour participer à ce stage. Si les participants sont choisis par un tirage au sort, quelle est la probabilité qu'ils participent les deux à ce stage ?
- c) Combien y a-t-il de façons différentes d'attribuer les 18 chambres aux 18 heureux participants à ce stage ?
- d) Après des années d'expérience, les organisateurs ont constaté que la probabilité d'attraper un rhume durant le stage est de 22% pour une jeune fille et de 28% pour un jeune homme. Quelle est la probabilité que 4 jeunes filles et 2 jeunes hommes attrapent un rhume durant le stage ?
- e) On entend soudain un jeune éternuer, ayant attrapé un rhume. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?
- f) Catherine a eu la chance d'être sélectionnée pour ce stage à 4 reprises durant ces dernières années. Quelle est la probabilité qu'elle ait attrapé au moins une fois un rhume ?

Pour se rendre à ce stage, les organisateurs ont acheté des billets d'avion Genève-Biarritz. En moyenne, le vol dure 68 minutes, avec un écart-type de 4 minutes.

- g) Calculer la probabilité pour que la durée  $D$  du vol aller de ce groupe de surfeurs soit comprise entre 66 minutes et 71 minutes.
- h) Calculer la probabilité que ce vol dure plus de 73 minutes.