



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - SESSION D'ÉTÉ 2020

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 :	/ 14 points
Problème 2 :	/ 12 points
Problème 3 :	/ 12 points
Problème 4 :	/ 12 points
Problème 5 :	/ 12 points

Total : / 50 points

NOTE :

Examineur/trice : Date : Signature :

Expert/e : Date : Signature :

Problème 1

Obligatoire

ANALYSE

Considérons la fonction f définie par $f(x) = (x+5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

- Déterminer le domaine de définition et les éventuelles intersections du graphe de f avec les axes Ox et Oy . Indiquer si cette fonction f est paire, impaire ou ni paire ni impaire.
 - Chercher les éventuelles asymptotes au graphe de f .
 - Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{5(x+2)}{3\sqrt[3]{x}}$ et donner le domaine de définition de f' .
 - À l'aide d'un tableau, étudier les variations de f et donner les coordonnées des éventuels extremums du graphe de f .
 - Montrer que f possède un unique point d'inflexion et donner les coordonnées de ce point.
 - Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé.
 - Donner l'équation de la droite tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = -1$.
 - Calculer l'aire du domaine situé entre le graphe de f et la partie de l'axe Ox comprise entre les deux zéros de f .
-

Problème 2

Obligatoire

ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit $B=(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et a un nombre réel.

Considérons une application linéaire f_a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\begin{cases} f_a(e_1) = a \cdot e_1 + (3a-1) \cdot e_2 \\ f_a(e_2) = (1-2a) \cdot e_2 \end{cases}$$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment.

Première partie

- Donner la matrice de f_a relativement à la base B .
- Déterminer les valeurs du nombre a pour lesquelles f_a est bijective.
 - Lorsque f_a est bijective, donner son noyau et son image.
 - Lorsque f_a n'est pas bijective, déterminer le noyau et l'image de f_a en fonction des valeurs de a .
- Calculer a pour que f_a soit une projection. Chercher alors les valeurs propres et les vecteurs propres de f_a .
- Calculer a pour que f_a soit une homothétie.
- Montrer qu'il existe une valeur du nombre a pour laquelle $f_a \circ f_a = I$, I désignant l'application identité dans $\mathbb{R}^2$.

Deuxième partie

Pour la fin du problème, on pose $a = \frac{1}{2}$.

- Écrire la matrice M de $f_{\frac{1}{2}}$.
 - Calculer la matrice $M^2 = M \cdot M$ de $f_{\frac{1}{2}} \circ f_{\frac{1}{2}}$. En déduire la matrice de M^7 .
-
-

Problème 3

Au choix avec les
problèmes 4 et 5

PROBABILITÉS

Le temps X en secondes mis par des skieurs lors d'une épreuve de descente à skis suit une distribution normale de moyenne 146 et d'écart-type 10.

- a) Calculer la probabilité qu'un skieur descende la piste en plus de 152 secondes.
- b) Calculer le temps qu'il faut réaliser pour figurer parmi les meilleurs 15% des skieurs.

Intéressons-nous maintenant aux 15 meilleurs de ces skieurs.

Parmi eux, on compte 5 suisses, 3 autrichiens, 2 italiens, 2 américains, un allemand, un norvégien et un canadien. Pour prendre une photo publicitaire de la station, l'organisateur de la course choisit au hasard trois skieurs parmi ces 15 meilleurs.

- c) De combien de manières différentes peut-il choisir ces trois skieurs ?
- d) Quelle est la probabilité que les skieurs choisis soient tous de même nationalité ?
- e) Quelle est la probabilité que parmi ces trois skieurs il y ait une majorité de skieurs non européens ?
- f) Si les deux premiers skieurs choisis sont suisses, quelle est la probabilité que les trois skieurs ne soient pas de même nationalité ?



Problème 4

Au choix avec les
problèmes 3 et 5

OPTIMISATION

On donne deux fonctions f et g définies par

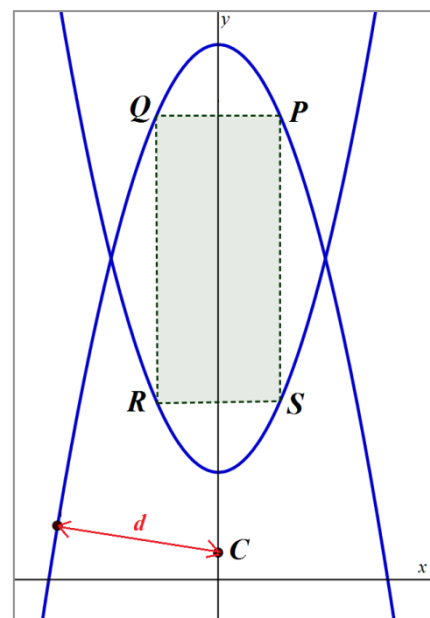
$$f(x) = 10 - x^2 \text{ et } g(x) = x^2 + 2.$$

Les deux paraboles tracées à droite représentent les graphes de f et g .

- a) Les deux sommets les plus hauts d'un rectangle $PQRS$ de côtés parallèles aux axes de coordonnées sont sur le graphe de f . Les deux autres sommets se trouvent sur le graphe de g , comme le montre l'illustration ci-contre.

Trouver les coordonnées du point P pour lesquelles l'aire de ce rectangle $PQRS$ est maximale.

- b) Trouver la distance minimale d entre le point $C(0; \frac{1}{2})$ et le graphe de f .



Problème 5

Au choix avec les
problèmes 3 et 4

GÉOMÉTRIE
DANS L'ESPACE

Considérons dans l'espace les quatre points $A(0; 2; 3)$, $B(1; -2; 6)$, $C(-4; 2; 15)$ et $D(-1; 2; 6)$, ainsi que le plan π donné par l'équation suivante :

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- a) Chercher une équation cartésienne du plan π .
- b) Montrer que les trois points A , B et C appartiennent à ce plan π .
- c) Calculer l'angle α au sommet A du triangle de sommets A , B et C .

Considérons maintenant les droites g_a , passant par le point D et de vecteur directeur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}, \text{ où } a \text{ désigne un nombre réel.}$$

- d) Existe-t-il une valeur du nombre a pour laquelle la droite g_a est parallèle au plan π .
Si oui, donner la valeur de a en précisant si cette droite est contenue dans le plan π .
- e) Existe-t-il une ou plusieurs valeurs du nombre a pour lesquelles la droite g_a coupe le plan π à angle droit ? Si oui, donner la ou les valeurs de a .
- f) Calculer les coordonnées du point B' , le symétrique du point B par rapport à la droite d passant par les points A et C .

* * * * *