



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - HIVER 2019

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Problème 1 : / 12 points

Problème 2 : / 14 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

Candidat :

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :
— les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
— puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur : Date : Signature : Note :

Problème 1 : Géométrie plane (obligatoire, 12 points)

On donne les points $C(8; -2)$ et $T(13; 3)$, les droites $d : x - y = 0$ et $e : x - 7y - 72 = 0$ et le cercle $\Omega : x^2 + y^2 - 20x - 4y + 96 = 0$.

Note : *Un dessin peut aider à la résolution du problème.*

- Montrer que le point C est à distance $\sqrt{50}$ de chacune des deux droites d et e . Donner l'équation du cercle Γ centré en C et tangent aux droites d et e .
- Vérifier que le point T est sur le cercle Γ , puis donner l'équation de la droite t tangente à Γ en T .
- Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites d et e . Donner l'équation de la bissectrice des droites d et e qui coupe l'axe des x dans sa partie positive.
- Le cercle Ω est-il tangent intérieurement au cercle Γ ? Justifier la réponse.
- Donner le centre C^* de l'un des cercles qui est tangent à la fois au cercle Γ et à la droite e et dont le rayon est le même que celui de Γ .

Problème 2 : Analyse (obligatoire, 14 points)

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x - 0.3}{x^3}$.

- a) Établir le tableau des signes de g .
- b) Donner les équations de toutes les asymptotes au graphe de g .
- c) Calculer la dérivée de g et donner les coordonnées de l'extremum du graphe de g .
- d) Représenter le graphe de g .

On considère maintenant la fonction f définie par

$$f(x) = g(x) \cdot e^x = \frac{x - 0.3}{x^3} e^x$$

- e) Donner les équations des éventuelles asymptotes au graphe de f .

On donne la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2.3x + 0.9}{x^4} e^x.$$

- f) Étudier la croissance de f en précisant les coordonnées des extremums au centième.
 - g) Représenter le graphe de f dans un repère d'unités égales à quatre carreaux.
- On s'intéresse aux droites tangentes au graphe de f et passant par l'origine.
- h) Les abscisses des points de contact de ces tangentes vérifient une équation du second degré que l'on déterminera.
- (Ni l'abscisse de ces points, ni l'équation des tangentes ne sont demandées.)*

Problème 3 : Algèbre linéaire (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On considère l'application linéaire f définie par sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ relativement à une base orthonormée $B = (e_1, e_2)$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

- a) À quelles conditions (relations entre a et b) l'application f est-elle injective ?
- b) Déterminer tous les couples $(a; b)$ pour lesquels l'application $f \circ f$ est l'identité.
- c) Donner une interprétation géométrique de f si $b = 0$ et $a \neq 0$.
- d) Pour $a = 3$ et $b = 3$, déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{ker}(f)$ puis donner une interprétation géométrique de f .
- e) Trouver la valeur de a et la valeur de b pour lesquelles M est la matrice d'une symétrie axiale où $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de l'axe de symétrie.

Pour la suite du problème, on décide que $b \neq 0$.

- f) Trouver les valeurs propres de f , en fonction de a et b .
- g) Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre, constater qu'ils ne dépendent ni de a ni de b .
- h) Donner la matrice de f dans la base $E = (v_1, v_2)$ où v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres de f linéairement indépendants.

Problème 4 : Suites (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

Partie A

Pour enrichir son expérience professionnelle, Jean-Luc a trouvé un travail à Hambourg, dans le nord de l'Allemagne. L'entreprise qui l'a embauché lui propose deux contrats de travail au choix à partir du 1^{er} janvier 2019.

Contrat 1 Il commence avec un salaire mensuel de 3000 euros durant la première année. Au début de chaque nouvelle année, son salaire mensuel augmente de 3%.

Contrat 2 Il commence avec un salaire mensuel de 3000 euros durant la première année. Au début de chaque nouvelle année, son salaire mensuel est augmenté de 200 euros.

On notera s_n son salaire au mois de janvier de l'année 2019 + n avec le premier type de contrat et w_n son salaire au mois de janvier de l'année 2019 + n avec le second type de contrat.

- Calculer s_1 , s_2 et s_3 .
- Déterminer de quel type particulier est la suite s_n , et exprimer s_n en fonction de n .
- Calculer w_1 , w_2 et w_3 .
- Déterminer de quel type particulier est la suite w_n , et exprimer w_n en fonction de n .
- Dans son plan de carrière, Jean-Luc n'envisage pas de rester plus de 10 ans à Hambourg. Calculer avec quel type de contrat il aura gagné le plus s'il reste dans cet emploi durant dix ans, entre le 1^{er} janvier 2019 et le 31 décembre 2028.
- Combien de temps faudrait-il qu'il reste dans cette entreprise pour que son salaire mensuel dépasse 8700 euros avec le contrat 1 ?

Partie B

Considérons la suite u_n définie par récurrence par $u_{n+1} = 2u_n - 3$, avec $u_0 = 1$.

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

Considérons aussi la suite v_n définie par $v_n = u_n - 3$.

- Montrer que v_n est une suite géométrique dont on donnera la raison, puis exprimer v_n en fonction de n .

Rappel : Il ne suffit pas de montrer que quelques premiers termes d'une suite forment une progression géométrique pour montrer que toute la suite est bien géométrique.

- Exprimer u_n en fonction de n , puis déterminer si la suite u_n admet une limite.

Problème 5 : Probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Une boîte contient 7 boules blanches et 9 boules noires.

Les questions suivantes sont indépendantes. Tous les tirages sont sans remise, sauf à la question f).

- a) On tire deux boules de cette boîte. Quelle est la probabilité qu'elles soient de même couleur?
- b) Si on a tiré deux boules de même couleur, quelle est la probabilité qu'elles soient blanches?
- c) Si on a déjà tiré deux boules blanches, quelle est la probabilité d'en tirer une troisième de la même couleur?
- d) On tire trois boules dans cette boîte. Quelle est la probabilité d'en avoir au moins une noire?

Une autre boîte contient x boules blanches et $(x + 2)$ boules noires.

- e) On tire deux boules dans cette boîte. Montrer que la probabilité de tirer deux boules de même couleur est donnée par $p(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x + 1}$.

Une dernière boîte contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire une boule, on note sa couleur puis on la remet dans la boîte. On effectue 5 tirages de ce type.

- f) Calculer la probabilité de tirer au moins trois boules blanches.