



Examen suisse de maturité, session d'été 2019

Mathématiques, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : / 14 points

Problème 2 : / 12 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

Note :

Correcteur :

Date :

Signature :

Problème 1, analyse (obligatoire, 14 points)

On considère la fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln(x))}$.

- Déterminer le domaine de définition D de cette fonction.
- Calculer les éventuelles intersections du graphe de f avec l'axe Ox , respectivement avec l'axe Oy .
- Déterminer les équations de toutes les asymptotes au graphe de f .
- Montrer que la dérivée de f est donnée par $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2(1 - \ln(x))^2}$.
- Étudier la croissance de f et donner les coordonnées de ses éventuels extremums.
- Représenter le graphe de f sans oublier les asymptotes.
- On appelle t la droite tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = e^2$.
Établir son équation en donnant la valeur exacte des coefficients, puis déterminer le point d'intersection de t et de l'axe Ox .
La représentation graphique de cette droite t n'est pas demandée.
- Trouver une primitive $F(x)$ de $f(x)$.
Suggestion : effectuer la substitution $u = 1 - \ln(x)$.

Problème 2, nombres complexes (obligatoire, 12 points)

On donne la fonction complexe f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 + 2iz + 3$.

- Déterminer les zéros de cette fonction.
- Déterminer les solutions de l'équation $f(z) = 4 + 18i$.
- Déterminer le nombre w pour lequel l'équation $f(z) = w$ n'a qu'une solution (ou deux solutions confondues), puis donner cette solution.
- On pose $f(x + yi) = u + vi$ avec $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
Montrer que $u = x^2 - y^2 - 2y + 3$ et $v = 2xy + 2x$.
- Prouver que l'image par f d'un nombre purement imaginaire, donc de la forme $z = yi$, est un nombre réel, puis déterminer l'image par f de l'axe imaginaire.
- L'image par f de l'axe réel est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe réel.
Donner une équation de cette parabole.
- Déterminer l'image réciproque de l'axe réel, c'est-à-dire l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

Problème 3, géométrie de l'espace (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On donne les droites $d_1 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = -21 + 8\mu \\ y = -13 + 4\mu \\ z = -5 + \mu \end{cases}$

- Montrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes et donner les coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites.
- Calculer l'angle aigu formé par les droites d_1 et d_2 .
- Donner l'équation cartésienne du plan α contenant les droites d_1 et d_2 .

On appelle p la droite qui est parallèle à d_1 et qui passe par l'origine $O(0;0;0)$ et on appelle n la droite qui passe par l'origine $O(0;0;0)$ et qui coupe d_1 à angle droit en un point appelé A .

- Déterminer le point d'intersection A des droites d_1 et n .
- Calculer la distance entre les droites d_2 et p .
- Calculer la distance entre les droites d_1 et p .
- Donner l'équation cartésienne du plan formé des points équidistants de la droite d_1 et de la droite p .

Problème 4, optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On considère un silo à grains formé d'un cylindre de hauteur h et de rayon r surmonté d'une demi-sphère de même rayon r . On appelle aire totale du silo la somme de l'aire latérale du cylindre et de l'aire de la demi-sphère.

- a) Si l'aire totale du silo est de $200\pi \text{ m}^2$, pour quelle valeur de r le volume du silo est-il maximal ? Que vaut alors h ?
- b) On désire construire un silo de volume égal à $126\pi \text{ m}^3$. La construction de la partie cylindrique coûte 100 francs par m^2 et celle de la partie sphérique 300 francs par m^2 .
 1. Montrer que le prix de la construction, en fonction de r , d'un tel silo vaut $\frac{1400\pi}{3} \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$
 2. Pour quelles valeurs de r et h le prix de construction est-il minimal ?

Problème 5, probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Dans un casino, pour jouer avec un certain type de machines à sous, il faut introduire une pièce de 1 franc puis appuyer sur un bouton. Quant aux gains, les machines sont réglées de la manière suivante :

- la probabilité que la machine distribue une pièce de 2 francs vaut 20%, dans ce cas le joueur réalise un bénéfice de 1 franc ;
 - la probabilité que la machine distribue un billet de 10 francs vaut 5%, dans ce cas le joueur réalise un bénéfice de 9 francs ;
 - certaines fois, évidemment, la machine garde le franc misé et ne distribue rien, dans ce cas le joueur perd 1 franc.
- a) Si un joueur introduit une pièce de 1 franc, calculer la probabilité que la machine ne distribue rien.
 - b) Calculer la moyenne de la variable aléatoire qui exprime le bénéfice réalisé par un joueur qui introduit une fois 1 franc. Ce jeu est-il équitable ? Sinon, à qui est-il profitable ?
 - c) Gaston joue 8 fois. Quelle est la probabilité que la machine lui distribue de l'argent 2 fois ?
 - d) Combien de fois, au minimum, Gaston doit-il jouer pour que la probabilité que la machine lui distribue au moins une fois un billet de 10 francs dépasse 90% ?
 - e) Gaston joue 2 fois. Quelle est la probabilité, qu'au final, il ne fasse ni bénéfice ni perte ?
 - f) Gaston joue 3 fois. Quelle est la probabilité, qu'au final, il fasse un bénéfice total de 9 francs ?
 - g) Gaston décide de jouer jusqu'à ce que la machine lui distribue un billet de 10 francs. Quelle est la probabilité qu'il doive jouer plus de 5 fois ?
 - h) Jules, sans le sou, aperçoit son ami Gaston et lui fait la demande suivante : « J'aimerais jouer encore 2 fois avant de partir. Prête-moi 2 francs s'il te plaît. Je te les rendrai quand j'aurai joué ». Si Gaston accède à la demande de Jules, quelle est la probabilité que ce dernier gagne suffisamment pour lui rendre la somme prêtée après avoir joué 2 fois ?
 - i) Sachant que Gaston a joué deux fois et que, à chaque fois la machine lui a distribué de l'argent, calculer la probabilité qu'il ait empoché au moins une fois un billet de 10 francs.