



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2018
Mathématiques, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : / 14 points

Problème 2 : / 12 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

Note :

Correcteur :

Date :

Signature :

Problème 1, analyse (obligatoire, 14 points)

Considérons la fonction $f(x) = (x+5)\sqrt[3]{x^2}$, dont on donne la dérivée première

$$f'(x) = \frac{5(x+2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

- a) Étudier complètement la fonction f , en traitant les points suivants :
- Domaine de définition de f , intersections éventuelles du graphe de f avec les axes Ox et Oy .
 - Recherche des éventuelles asymptotes au graphe de f .
 - Vérifier que la dérivée f' est bien celle donnée au début de l'exercice et détermination du domaine de dérivabilité de f .
 - Étude de la croissance de f . Recherche des éventuels extremums de f .
 - Représentation graphique de f , en se limitant à des valeurs de x comprises entre -6 et 2.
- b) Calculer l'aire du domaine fermé délimité par l'axe Ox et le graphe de f .
- c) Calculer l'équation de la tangente t au graphe de f au point d'abscisse $x=1$.
- d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de t avec Ox .

Problème 2, nombres complexes (obligatoire, 12 points)

On considère les nombres complexes $z_1 = 2i$ et $z_2 = 8i$.

- a) Calculer le nombre $w = \frac{(z_2)^2}{(z_1)^5}$. Donner la réponse sous forme algébrique.
- b) Résoudre l'équation $z^2 = z_1$. Donner les solutions sous forme algébrique.
- c) Résoudre l'équation $z^3 = z_2$. Donner les solutions sous forme trigonométrique.

On rappelle, pour la suite du problème, qu'un nombre z_0 est un point invariant d'une fonction f s'il satisfait l'équation $f(z_0) = z_0$.

- d) On considère la fonction complexe $f(z) = z_1 \cdot z + z_2$.
Déterminer le zéro de f .
Déterminer le point invariant de f .
Donner une interprétation géométrique de la fonction f .
- e) Trouver la fonction polynomiale $g(z)$ du deuxième degré qui a les propriétés suivantes :
 $z_1 = 2i$ et $z_2 = 8i$ sont les zéros de g et $z_0 = 4i$ est un point invariant de g .
- f) On donne le polynôme $P(z) = z^3 - 11iz^2 - 26z + 16i$.
Prouver que $z_1 = 2i$ et $z_2 = 8i$ sont des zéros de P , puis déterminer le troisième zéro de ce polynôme.

Problème 3, géométrie (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne la droite d_1 d'équation $3x - y = 0$ et la droite d_2 d'équation $x - 3y + 8 = 0$.

- a) Déterminer les coordonnées de A , le point d'intersection de d_1 avec d_2 . Vérifier la réponse.
- b) Déterminer les coordonnées des sommets B , C et D du losange $ABCD$ situé entièrement dans le premier quadrant et construit de la manière suivante :
- le côté AD est sur d_1 et le côté AB est sur d_2 .
- la longueur des côtés est de $2\sqrt{10}$.

Si on ne trouve pas les sommets de ce losange, on prendra les points suivants pour la suite du problème :

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{13}{2}; \frac{5}{2}\right), C\left(\frac{17}{2}; \frac{17}{2}\right), D\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{2}\right).$$

- c) Calculer les angles ainsi que l'aire du losange $ABCD$.
- d) On considère le cercle Γ de rayon $r = \sqrt{10} - \sqrt{2}$, tangent aux droites (AD) et (AB) et intérieur au losange $ABCD$. Déterminer les coordonnées du centre Ω de Γ .
- e) Montrer que le point $(6 - \sqrt{5}; 8 - \sqrt{5})$ est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABD .

Problème 4, probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

Pour mesurer l'impact d'un traitement sur la guérison d'une certaine maladie, on effectue un test sur 2'500 personnes atteintes de cette maladie.

On prescrit un médicament A à 1'200 de ces personnes, on prescrit un médicament B à 800 autres de ces personnes et un médicament sans substance active, un placebo, aux 500 dernières personnes.

Dans le groupe traité avec le médicament A , on observe 700 guérisons.

Dans le groupe traité avec le médicament B , on observe 500 guérisons.

Dans le groupe traité avec le placebo, on observe 250 guérisons.

On choisit au hasard une personne parmi les 2'500 personnes atteintes de cette maladie.

Les questions a), b), c), d), e) sont indépendantes.

- a) Calculer la probabilité qu'elle ait reçu le médicament B ou qu'elle ait reçu le placebo.
- b) Calculer la probabilité qu'elle ait reçu le médicament A et qu'elle ne soit pas guérie.
- c) Calculer la probabilité qu'elle soit guérie.
- d) On constate qu'elle est guérie ; quelle est la probabilité que cette personne ait été traitée avec le placebo ?
- e) Le fait qu'une personne soit guérie est-il indépendant du fait qu'elle ait été traitée avec le placebo ? Justifier la réponse.

On s'intéresse maintenant au médicament B , qui semble être le plus approprié pour traiter cette maladie. On a constaté qu'en pharmacie, le prix de ce médicament suit une loi normale de moyenne égale à 35.90 frs avec un écart-type de 4.50 frs.

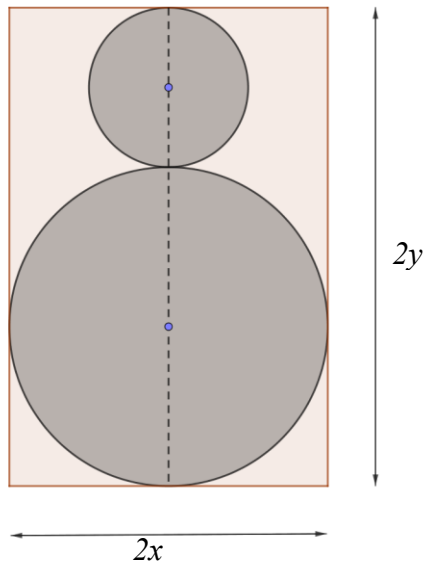
- f) Calculer la probabilité qu'une boîte achetée en pharmacie coûte plus de 38 frs.

Un nouveau médicament M est arrivé sur le marché. On constate qu'avec le médicament M , le taux de guérison est de 80 %.

- g) Calculer la probabilité que sur 6 personnes malades et traitées avec ce médicament M , plus de la moitié guérissent.
- h) Calculer la plus petite valeur de n (n entier) pour laquelle la probabilité qu'au moins une personne parmi n personnes ne guérissent pas avec ce médicament M soit supérieure à 99%.

Problème 5, optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Un rectangle contient deux disques tangents entre eux et tangents à certains côtés du rectangle, comme le montre la figure ci-contre.



- a) L'aire du rectangle est égale à $4\sqrt{2}$. Déterminer x et y pour que la somme des aires des deux disques soit minimale. Justifier que c'est bien un minimum.
- b) Dans cette nouvelle question, on ne tient plus compte des disques. Sachant que la longueur de la diagonale du rectangle est égale à $2\sqrt{2}$, déterminer x et y pour que l'aire du rectangle soit maximale. Justifier que c'est bien un maximum.