



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - SESSION D'ÉTÉ 2018

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Problème 1 :	/ 14 points
Problème 2 :	/ 12 points
Problème 3 :	/ 12 points
Problème 4 :	/ 12 points
Problème 5 :	/ 12 points
Total :	/ 50 points

Prénom :

Numéro :

NOTE :

Date : Signature du correcteur :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1

Obligatoire

ANALYSE

Considérons la fonction réelle f , définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, dont on donne la dérivée $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$.

- 1.1 Déterminer le domaine de définition D_f de cette fonction f .
- 1.2 Calculer les éventuelles intersections du graphe de f avec les axes Ox et Oy .
- 1.3 Étudier la parité de f .
- 1.4 On admettra que la fonction f est bijective. Calculer rf la fonction réciproque de f .
- 1.5 Déterminer les éventuelles asymptotes au graphe de f .
- 1.6 Étudier la croissance de f et donner les coordonnées de ses éventuels extremums.
- 1.7 Montrer que le graphe de f possède un unique point d'inflexion et donner son abscisse.
- 1.8 Tracer la représentation graphique de f , en dessinant également ses éventuelles asymptotes, ainsi que le graphique de sa réciproque rf .
- 1.9 Écrire f comme la différence de deux fonctions logarithmiques, puis calculer une primitive de f . Calculer ensuite l'aire du domaine dans le premier quadrant délimité par l'axe Ox , le graphe de f et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Problème 2

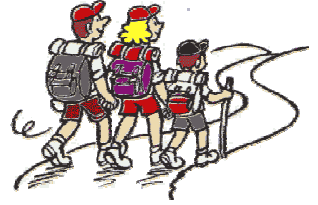
Obligatoire

PROBABILITÉS

Les familles Duparc et Petitbois passent quelques jours de vacances dans le charmant village de montagne de L'Alpe Fleurie. Cette petite station propose six circuits de promenades à ses hôtes.

Chaque matin, chacune de ces deux familles choisit au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des six circuits pour aller s'y promener. De ce fait, il est possible que le même circuit soit choisi plusieurs fois.

- 2.1 Calculer la probabilité que ces deux familles aient choisi, un jour donné, le même circuit de promenade.
- 2.2 Calculer la probabilité que pendant 5 jours consécutifs, elles ne se retrouvent jamais sur le même circuit.
- 2.3 Calculer la plus petite valeur de k pour laquelle la probabilité de se retrouver au moins une fois sur le même circuit pendant k jours consécutifs est supérieure à 90%.
- 2.4 Calculer la probabilité que ces deux familles se retrouvent sur le même circuit à cinq reprises, si elles effectuent les deux un séjour de 16 jours.
- 2.5 Calculer la probabilité que les deux familles aient tiré au sort le même circuit le premier jour et aient tiré au sort le même circuit le deuxième jour.



L'office du tourisme de l'Alpe Fleurie a constaté que le temps nécessaire à un groupe ou une famille pour effectuer la promenade sur le 4^e circuit était une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 7,4 heures avec un écart-type de trois quarts d'heure.



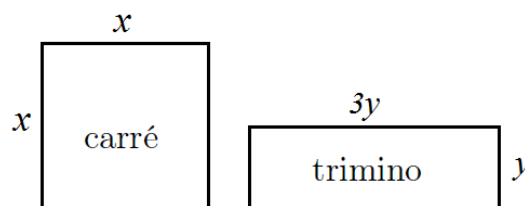
- 2.6 Calculer la probabilité que la famille Duparc mette entre 7 et 8 heures pour effectuer la promenade du 4^e circuit.
- 2.7 Calculer pour quelle valeur de temps t la probabilité que la famille Petitbois termine le 4^e circuit dans l'intervalle de $[7,4 - t ; 7,4 + t]$ heures est égale à 84 %.

Problème 3

Au choix avec les problèmes 4 et 5

OPTIMISATION

On coupe en deux morceaux une ficelle de 112 centimètres de longueur, afin de délimiter deux surfaces : un carré et un trimino.
(Un trimino est un rectangle trois fois plus long que large.)



- 3.1 Déterminer les dimensions du carré et du trimino que l'on peut ainsi délimiter pour que la somme de leurs deux aires soit minimale.
- 3.2 Déterminer les dimensions du carré et du trimino que l'on peut ainsi délimiter pour que le produit de leurs deux aires soit maximal, respectivement minimal.

Note : il convient de justifier qu'il s'agit bien de valeurs minimales, respectivement maximales, dans les questions 3.1 et 3.2

Problème 4

Au choix avec les
problèmes 3 et 5

ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit $B=(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

4.1 Considérons une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(3e_1+4e_2) = e_1+2e_2 \quad \text{et} \quad f(-4e_1+2e_2) = -2e_1+e_2.$$

Donner la matrice de f relativement à la base B .

4.2 L'application $p : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y + \cos(x) \\ x + 2y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est-elle linéaire ? Justifier la réponse.

Considérons une application linéaire g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.3 Calculer le noyau de g .

4.4 L'application g est-elle bijective ? Si oui, donner la matrice de l'application réciproque de g .

4.5 Cette application g possède-t-elle des vecteurs invariants, c'est-à-dire des vecteurs v tels que $g(v)=v$? Si oui, lesquels ? Justifier la réponse.

4.6 Cette application g possède-t-elle des valeurs propres réelles ? Justifier la réponse.

Soit h une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ correspondant à une rotation centrée en l'origine et d'angle $\pi/3$.

4.7 Donner les images par h des deux vecteurs e_1 et e_2 de la base canonique et donner la matrice R de cette application h .

4.8 Existe-t-il un ou plusieurs nombres entiers n , tel que $R^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?
Si oui, donner ce(s) nombre(s).

4.9 Donner R^{2018} .

Problème 5

Au choix avec les
problèmes 3 et 4

GÉOMÉTRIE PLANE

Considérons deux droites $g : x - y - 2 = 0$ et $h : 7x - y - 38 = 0$, ainsi que le point $B(2; -4)$.

5.1 Vérifier que le point $A(6; 4)$ est l'intersection des droites g et h .

5.2 Montrer que le point B est équidistant des droites g et h .

5.3 Établir que la droite $d : x + 2y - 14 = 0$ est l'une des bissectrices des droites g et h .

5.4 Calculer les coordonnées du symétrique S de B relativement à d .

5.5 Vérifier que la droite $m : x + 2y - 4 = 0$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

5.6 Calculer les coordonnées du sommet C du triangle ABC isocèle en C et dont h est la hauteur issue de A .

5.7 Donner l'équation du cercle Γ centré en B et tangent aux droites g et h , et calculer la distance du point $K(-2; -8)$ au cercle Γ .

Note : un dessin peut aider à la résolution de ce problème.