



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - HIVER 2017

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Problème 1 :	/14 points
Problème 2 :	/14 points
Problème 3 :	/11 points
Problème 4 :	/11 points
Problème 5 :	/11 points
Total :	/50 points

Candidat :

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,*
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.*

Correcteur : Date : Signature : Note :

Problème 1 : Analyse (obligatoire, 14 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{1-3x}$.

- Donner le signe de f et l'équation de toutes les asymptotes au graphe de f .
- Représenter le graphe de f .
- Donner l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = 1$.
- Donner l'équation d'une des tangentes au graphe de f parallèle à la droite d'équation $y = -4x$.
- Pour quelle(s) valeur(s) de x la tangente au graphe de f au point $(x; f(x))$ passe-t-elle par l'origine $(0; 0)$?
- Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire $f(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{9x-3}$.
- Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe des x , le graphe de f et les verticales $x = \frac{1}{2}$ et $x = 5$.
- On fait tourner le domaine $\mathcal{D}$ autour de l'axe des x . Donner une primitive permettant de calculer le volume de ce solide de révolution. On ne demande pas de calculer ce volume.

Problème 2 : Géométrie (obligatoire, 14 points)

Représenter tous les points, toutes les droites et tous les cercles de ce problème en utilisant une unité égale à un carreau.

On considère le triangle ABC donné par la bissectrice intérieure $b_C : 3x + y - 13 = 0$ de l'angle en C , le centre $W(5; -2)$ de son cercle inscrit Γ_1 et $T(7; 2)$ le point de contact du cercle inscrit Γ_1 avec le côté BC , ainsi que par l'équation cartésienne du côté $(AB) : x - 2y - 19 = 0$.

- Donner l'équation du cercle centré en W et passant par T (ce cercle est donc Γ_1).
- Déterminer, par calcul, les coordonnées du point de contact U de la droite (AB) avec le cercle Γ_1 .
- Donner l'équation de la tangente t au cercle Γ_1 en T (cette droite est donc (BC)).
- Vérifier, par calcul, que les coordonnées du sommet C sont égales à $(3; 4)$.
- Vérifier, par calcul, que le symétrique du point T par rapport à b_C est $V(1; 0)$. Justifier que ce point est sur le côté (AC) et former l'équation de (AC) .
- Vérifier, par calcul, que les coordonnées des deux autres sommets du triangle ABC sont $A(-5; -12)$ et $B(15; -2)$.

On considère maintenant le cercle Γ_2 d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 14y - 51 = 0$.

- Calculer le centre et le rayon de Γ_2 .
- Montrer que la somme des diamètres des cercles Γ_1 et Γ_2 est égale à la somme des longueurs des côtés CA et CB du triangle ABC .

Problème 3 : Algèbre linéaire (à choix avec les problèmes 4 et 5, 11 points)

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par sa matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$.

- Quelle est l'image par f du vecteur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$?
- Existe-t-il un ou plusieurs vecteurs v colinéaires à $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ tels que $f(v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$?
Si oui, donner ce(s) vecteur(s).
- Montrer que $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f .
- Déterminer les valeurs propres de f . Donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre de f .
L'application linéaire f est-elle bijective ? (Justifier votre réponse.)
- Calculer la matrice M^2 de l'application linéaire $f^2 = f \circ f$.
En déduire la matrice M^6 de l'application linéaire $f^6 = f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f$.
- Donner une interprétation géométrique précise de f .

Problème 4 :**Géométrie de l'espace (à choix avec les problèmes 3 et 5, 11 points)**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\alpha : 2x - y + z - 4 = 0$.

- a) Montrer que les équations suivantes $\begin{cases} x = 2 + k + m \\ y = 1 + k + 3m \\ z = 1 - k + m \end{cases}$ sont des équations paramétriques du plan α .
- b) Déterminer les équations paramétriques de la droite d , intersection du plan α et du plan $\beta : 28x + y + 9z - 66 = 0$.
- c) On appelle C_1 , C_2 et C_3 les points d'intersection respectifs du plan α avec les axes O_x , O_y et O_z . Calculer l'aire du triangle de sommets C_1 , C_2 et C_3 .
- d) On donne les points $A(-4; 3; -2)$ et $B(-6; 7; 4)$.
Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$ et calculer la distance de ce point I au plan α .
- e) Déterminer les équations paramétriques de la droite g passant par I et perpendiculaire au plan α . Calculer les coordonnées du point P qui est la projection orthogonale du point I sur le plan α .
- f) Déterminer l'équation cartésienne du plan γ , parallèle au plan α , et contenant le symétrique du point I par rapport à α . (Remarque : ce point symétrique n'est pas demandé.)

Problème 5 :**Nombres complexes (à choix avec les problèmes 3 et 4, 11 points)**

On considère les nombres complexes $z_0 = 0$, $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

- a) Montrer que dans le plan de Gauss le triangle de sommets z_0 , z_1 et z_2 est équilatéral.
- b) Déterminer le nombre z_6 ($z_6 \neq z_2$) tel que le triangle de sommets z_0 , z_1 et z_6 soit également équilatéral.
- c) Un hexagone régulier est centré en $z_0 = 0$; ses sommets sont z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 et z_6 . Donner les sommets z_3 , z_4 et z_5 .

On donne la fonction complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \bar{z}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué complexe de z .

- d) Calculer $f(z_0)$, $f(z_1)$ et $f(z_2)$; puis en déduire une interprétation géométrique simple de la fonction f .
- e) Dans le plan de Gauss, les nombres complexes $z = x + iy$ dont les images par f sont sur l'axe réel forment une droite. Déterminer, par un calcul ou un raisonnement géométrique, une équation de cette droite.