



Examen suisse de maturité, session d'été 2017
Mathématiques, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : / 14 points

Problème 2 : / 12 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

Note :

Correcteur :

Date :

Signature :

Problème 1, analyse (obligatoire, 14 points)

On considère la fonction $f(x) = (4x^2 + 4x + m)e^{-x}$, avec $m \in \mathbb{R}$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de m la fonction f est-elle partout décroissante ?

Pour la suite on pose $m = 0$, ainsi $f(x) = (4x^2 + 4x)e^{-x}$.

On donne également $f''(x) = (4x^2 - 12x)e^{-x}$.

- b) Étudier la fonction f (zéro(s), comportement asymptotique, point(s) à tangente horizontale et point(s) d'inflexion avec les coordonnées arrondies au centième, graphe).
- c) Hachurer sur le dessin la surface S délimitée par le graphe de f , l'axe des x , et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.
Calculer l'aire de S .
- d) Déterminer une équation de la tangente t_1 au graphe de f en son point d'abscisse $x = 1$ et représenter cette tangente sur le dessin.
- e) On nomme t_k la droite tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = k$.
En s'aidant du graphe et sans faire de calculs, donner l'ensemble des valeurs k telles que la tangente t_k et le graphe de f aient exactement deux points communs.

Problème 2, algèbre linéaire (obligatoire, 12 points)

On considère l'application linéaire f définie par sa matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ainsi que l'application linéaire g définie par sa matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
- Calculer la matrice de l'application linéaire $f^2 = f \circ f$ et donner une interprétation géométrique précise de cette application f^2 .
- Montrer que la matrice de l'application linéaire $f^2 - g^2$ est $C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.
- Donner la matrice B^{-1} de l'application linéaire réciproque de g , puis vérifier que $C \cdot B^{-1} = -C$.
- Vérifier que les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de l'application $f^2 - g^2$. En déduire les valeurs propres de l'application $f^2 - g^2$.
- Donner une interprétation géométrique précise de l'application $f^2 - g^2$.

Problème 3, probabilités (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

Pour essayer d'accroître ses ventes, la fabrique de chocolat *Superchoc* annonce qu'elle mettra une surprise dans une plaque de chocolat sur sept. Ainsi, pour chaque plaque, la probabilité d'y trouver une surprise vaut $\frac{1}{7}$. Les plaques sont toutes de même forme et de même poids, mais peuvent avoir des parfums différents.

Bertrand, qui est très gourmand, achète 16 plaques de chocolat *Superchoc*.

- Quelle est la probabilité que la troisième et la cinquième plaque contiennent une surprise ?
- Quelle est la probabilité qu'il ne trouve une surprise que dans la troisième et la cinquième plaque ?
- Quelle est la probabilité qu'il trouve exactement 4 surprises dans ses 16 plaques ?

Christian est également amateur de chocolat et de surprises.

- Combien doit-il acheter de plaques de chocolat *Superchoc* pour que la probabilité qu'il trouve au moins une surprise soit supérieure à 90 % ?

Lorsqu'il a visité la fabrique *Superchoc*, François s'est vu offrir un assortiment de 17 plaques de chocolat ayant toutes un parfum différent.

- De combien de manières différentes peut-il répartir ces 17 plaques entre ses trois enfants, s'il désire en donner 7 à Albert, 6 à Luc et 4 à Claude ?

Un grand magasin achète 29'400 plaques de chocolat à la fabrique *Superchoc*.

- À l'aide d'une approximation par la loi normale, calculer la probabilité qu'il y ait entre 4180 et 4210 surprises dans ce lot de plaques, 4180 et 4210 y compris.

Une enquête a révélé que le poids des plaques de chocolat *Superchoc* suit une loi normale de moyenne 223 grammes et d'écart-type 1.86 grammes.

- Calculer la probabilité qu'une plaque achetée chez un épicier pèse plus de 224 grammes.

Problème 4, géométrie (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On donne les points $A(9; 4; 6)$, $B(5; -5; 7)$, $C(0; 3; 10)$, ainsi que la droite $d: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + 11\lambda \end{cases}$.

- Vérifier que le triangle ABC est équilatéral.
- Trouver l'équation cartésienne du plan π contenant les points A , B et C .
- Trouver un point D de d tel que $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.
Il y a deux réponses possibles, choisir le point D dont les coordonnées sont entières.
Remarque : Si un tel point n'a pas pu être déterminé, continuer le problème avec le point de rechange (à coordonnées non entières) $D\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- Vérifier que $ABCD$ est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont la même longueur, et calculer son volume.
- Calculer la valeur de l'angle déterminé par l'arête (AD) et la face (ABC) .
- Déterminer le symétrique S du sommet D par rapport à la face (ABC) .

Problème 5, optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

On donne un segment $[AB]$ de longueur 40 cm, dont le milieu est H .

On considère les cercles dont $[AB]$ est une corde.

Le centre d'un tel cercle est noté C et son rayon R .

- Si $[KD]$ est un diamètre du cercle qui est perpendiculaire à $[AB]$ et si x est la longueur du segment $[KH]$, montrer que

$$R = \frac{x^2 + 400}{2x}$$

- Pour quelle valeur de x le rayon est-il minimal ? Justifier qu'il est bien minimal et donner sa valeur.

