



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - Session d'été 2016

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Problème 1 : / 13 points
Problème 2 : / 13 points
Problème 3 : / 12 points
Problème 4 : / 12 points
Problème 5 : / 12 points

Prénom :

Numéro :

Total : / 50 points

NOTE :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1

Obligatoire

ANALYSE

Soit la fonction f , définie par $f(x) = \frac{1}{1+e^{-4x}}$.

- 1.1 Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire ainsi : $f(x) = \frac{e^{4x}}{1+e^{4x}}$, puis prouver que $f'(x) = \frac{4e^{4x}}{(1+e^{4x})^2}$.
- 1.2 Effectuer l'étude complète de cette fonction f , en traitant les points suivants :
 - le domaine de définition, le signe de f et les éventuelles intersections avec les axes des x et des y ;
 - les éventuelles asymptotes (verticales, horizontales ou obliques);
 - le tableau des variations de f et les éventuels extremums;
 - la représentation graphique de f , en faisant figurer toutes les éventuelles particularités trouvées aux questions précédentes (intersections avec les axes, asymptotes, extremums).
- 1.3 Déterminer l'abscisse du point du graphe de f en lequel la pente de la tangente vaut 1, puis donner l'équation de cette tangente.
- 1.4 Calculer pour quelle valeur du nombre $\alpha > 0$ l'aire du domaine délimité par l'axe des x , les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$, et le graphe de f vaut exactement $\frac{1}{4}$.

Problème 2

Obligatoire

ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans ce problème, toutes les matrices des applications linéaires seront données relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Les trois parties sont indépendantes les unes des autres; il n'est donc pas nécessaire d'avoir traité une partie pour en traiter une autre.

Partie 1 :

2.1 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, donnée par sa matrice $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer l'image de $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

2.2 Existe-il des vecteurs invariants pour cette application f , c'est-à-dire des vecteurs qui sont égaux à leur image par f [et donc solution de l'équation $f(v)=v$] ? Si oui, lesquels ?

2.3 Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire f .

2.4 Cette application est-elle bijective ?

- Si oui, calculer la matrice de l'application linéaire réciproque de f .

- Si non, donner deux vecteurs différents dans $\mathbb{R}^2$ qui ont la même image par f .

2.5 Calculer les valeurs propres de f et donner tous les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

Partie 2 :

2.6 On cherche une application linéaire g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, telle que son ensemble image $\text{Im}(g)$ soit égal à l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 2k \\ -4k \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Donner une matrice M_g d'une telle application g .

2.7 L'application linéaire g trouvée à la question 2.6 est-elle bijective ?

2.8 Donner l'ensemble des préimages de $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ par g .

Partie 3 :

2.9 Donner la matrice M_h de l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$,

telle que $h\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $h\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -18 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Problème 3

Au choix avec les problèmes 4 et 5

NOMBRES COMPLEXES

3.1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.
Donner les solutions sous forme algébrique **et** sous forme trigonométrique.

3.2 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^6 - z^3 + 1 = 0$.
Donner cette fois les solutions uniquement sous forme trigonométrique.

On donne la fonction complexe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f: z \rightarrow w = z^2 + 1$.

3.3 Trouver les zéros de cette fonction f .

3.4 Écrire l'image par f de $z = x + iy$ sous la forme $w = u + iv$, avec $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

3.5 Trouver l'image par f de la droite du plan de Gauss d'équation $y = x$.

3.6 Vérifier que l'image par f de la droite d'équation $x = 1$ n'est pas une droite.

3.7 Représenter dans le plan de Gauss l'image du triangle de sommets $z_1=0$, $z_2=1$ et $z_3=1+i$.

Problème 4

Au choix avec les
problèmes 3 et 5

PROBABILITES

Dans un jeu télévisé très populaire, il y a chaque soir un nouveau candidat auquel on propose de plonger sa main dans une urne contenant 2 boules dorées, 4 boules noires et une boule verte.

Il tire l'une de ces boules au hasard.

- Si c'est une boule dorée, il gagne un superbe cadeau qui est caché derrière un rideau rouge.
- Si c'est une boule noire, il a perdu.
- Si c'est la boule verte, il doit, sans remettre cette boule dans l'urne, tirer une seconde boule. Si cette dernière est dorée il gagne le cadeau, sinon il a perdu.

4.1 Représenter cette situation par un arbre.



4.2 Calculer la probabilité de gagner à ce jeu.

4.3 Le candidat tire d'abord la boule verte. Quelle est alors la probabilité qu'il perde à ce jeu ?

4.4 Jean regarde la retransmission de ce jeu à la télévision, mais en zappant, il ne voit que le moment où le candidat saute de joie car il a gagné. Quelle est la probabilité que ce candidat ait commencé le jeu en tirant la boule verte ?

4.5 Jean, passionné par ce jeu, le regarde 4 soirs de suite.

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un gagnant ?



4.6 Lors de la saison passée, il y a eu 120 émissions de ce jeu diffusées à la télévision. En utilisant l'approximation de la loi binomiale par la loi normale, calculer la probabilité qu'il y ait eu entre 35 et 45 gagnants y compris au cours de cette saison.

Pour la prochaine saison de ce jeu, l'organisateur décide de modifier le nombre de boules pour que la probabilité de gagner change. Il fixe cette probabilité à $\frac{18}{55}$. Il désire placer x boules dorées, $2x$ boules noires et deux boules vertes dans l'urne. On précise que si le candidat tire deux fois une boule verte, il aura perdu.

4.7 Calculer le nombre de boules dorées et noires que devra contenir cette urne pour que les exigences de l'organisateur soient satisfaites.

Problème 5

Au choix avec les
problèmes 3 et 4

GÉOMÉTRIE
DE L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points suivants :

$A(1;2;3)$, $B(2;4;2)$, $C(1;5;3)$ et $D(7;2;9)$.

5.1 Déterminer des équations paramétriques de la droite (AC) qui passe par A et C .

5.2 Montrer que le triangle ABC est rectangle en B , puis calculer son aire.

5.3 Donner une équation cartésienne du plan δ qui contient les points A , B et C .

5.4 Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[DC]$, puis donner l'équation du plan π qui est perpendiculaire au segment $[DC]$ et qui passe par M .

5.5 Calculer le point d'intersection I de la droite (AC) avec ce plan π .

5.6 Calculer la distance du point A au plan π .

5.7 Montrer que le triangle ABM est isocèle en M , c'est-à-dire que $MA = MB$.