



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - HIVER 2015

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Candidat :

Problème 1 :	/14 points
Problème 2 :	/10 points
Problème 3 :	/13 points
Problème 4 :	/13 points
Problème 5 :	/13 points
Total :	/50 points

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,*
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.*

Correcteur : Date : Signature : Note :

Problème 1 : Analyse (obligatoire, 14 points)

On considère les fonctions f du type $f(x) = a \ln(x) \cdot (\ln(x) + b)$ avec a et b des nombres réels non nuls.

- Calculer $f'(x)$, la dérivée de $f(x)$.
- Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = 1$.
- Déterminer les valeurs de a et de b pour lesquelles le graphe de f possède une tangente horizontale au point $H(e; -1)$.

**Pour la suite du problème, on choisit $a = 1$ et $b = -2$,
donc $f(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2)$.**

- Étudier la fonction f . On demande :
 - L'ensemble de définition ;
 - Les points d'intersection du graphe et des axes de référence ;

- Le tableau des signes de f ;
 - La limite à droite de f en zéro ;
 - Les coordonnées des éventuels points à tangente horizontale ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance.
 - La représentation graphique dans un repère orthonormé.
- e) Résoudre l'équation $f(x) = 3$.
- f) Déterminer les valeurs des constantes A , B et C de manière que la fonction $F(x) = x (A \ln^2(x) + B \ln(x) + C)$ soit une primitive de la fonction f .
- g) Hachurer la surface fermée délimitée par le graphe de f et l'axe des abscisses, puis calculer son aire.

Problème 2 : Algèbre linéaire (obligatoire, 10 points)

On considère l'application linéaire f définie par sa matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$ où les nombres a , b sont réels et non nuls.

- a) Vérifier que les vecteurs $v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de f .
En déduire les valeurs propres de f .

Pour la suite du problème, on pose $a = 3$ et $b = 4$. Donc, f est définie par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$.

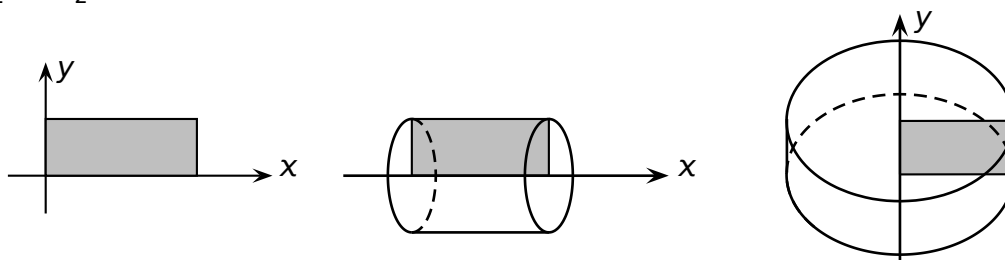
- b) Donner une interprétation géométrique précise de l'application linéaire f .

On définit une autre application linéaire g par sa matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

- c) Déterminer les valeurs propres de g . Donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre de g .
- d) Donner la matrice de l'application linéaire réciproque de g .
- e) Calculer la matrice C associée à l'application linéaire $f \circ g^{-1}$. Déterminer le noyau de $f \circ g^{-1}$.

Problème 3 : Optimisation (à choix avec les problèmes 4 et 5, 13 points)

On fait tourner le rectangle ci-dessous autour de l'axe des x d'abord, autour de celui des y ensuite. On obtient ainsi deux corps de révolution de volumes respectifs V_1 et V_2 .



- a) Dans cette première question, l'aire du rectangle vaut 4. Trouver les dimensions de ce rectangle sachant que la somme des volumes V_1 et V_2 est minimale.
- b) Dans cette deuxième question, le périmètre du rectangle vaut 4. Trouver les dimensions de cet autre rectangle sachant que le produit des volumes V_1 et V_2 est maximal.

Indication. Vérifier que le produit des volumes peut s'écrire $\pi^2 (2x - x^2)^3$.

Problème 4 :**Géométrie de l'espace (à choix avec les problèmes 3 et 5, 13 points)**

On considère le plan α :
$$\begin{cases} x = -2\lambda + 2\mu \\ y = 6 + 3\lambda + 3\mu \\ z = -5\mu \end{cases}.$$

- a) Déterminer par calcul si le point $P\left(1; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ appartient au plan α .
- b) On appelle A , B et C les points d'intersection respectifs du plan α avec les axes O_x , O_y et O_z . Vérifier que ces points sont $A(4; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$ et $C(0; 0; 5)$. Calculer l'aire du triangle ABC .
- c) Déterminer les coordonnées du point du plan α qui est le plus proche de l'origine $O(0; 0; 0)$.
- d) Calculer la distance de l'origine O à la droite (AB) .
- e) Déterminer les équations paramétriques de la droite d qui passe par le point $Q(2; 3; 2)$ et qui est parallèle à la fois au plan α et au plan (OAB) .
- f) Calculer l'angle aigu formé par les deux plans α et β , où β est le plan qui passe par l'origine O et dont un vecteur normal est $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Problème 5 : Probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 4, 13 points)

Une usine fabrique des appareils rouges et des appareils bleus.

Dans la camionnette de l'usine, le livreur a chargé 8 de ces appareils, qu'il a pris au hasard dans l'entrepôt où se trouvaient 13 appareils rouges et 10 bleus. Comme ils sont tous emballés dans des cartons beiges, il n'a pas la moindre idée du nombre d'appareils de chaque couleur qu'il a ainsi chargés.

- a) Calculer la probabilité qu'il y ait le même nombre d'appareils de chaque couleur dans la camionnette.
- b) Calculer la probabilité que tous les appareils dans la camionnette soient de la même couleur.
- c) Calculer la probabilité que le livreur ait chargé au moins deux appareils bleus.

La durée de vie des appareils rouges suit une loi normale de moyenne $\mu = 174$ jours et d'écart-type $\sigma = 29$.

- d) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un appareil rouge soit comprise entre 205 et 225 jours.
- e) Sur 200 appareils rouges, combien de ceux-ci, en moyenne, auront-ils une durée de vie de plus de 160 jours ?
- f) Déterminer le nombre de jours à partir duquel la probabilité qu'un appareil rouge fonctionne encore est inférieure à 10%.