



Examen suisse de maturité, session d'été 2015
Mathématiques, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : / 13 points

Problème 2 : / 13 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

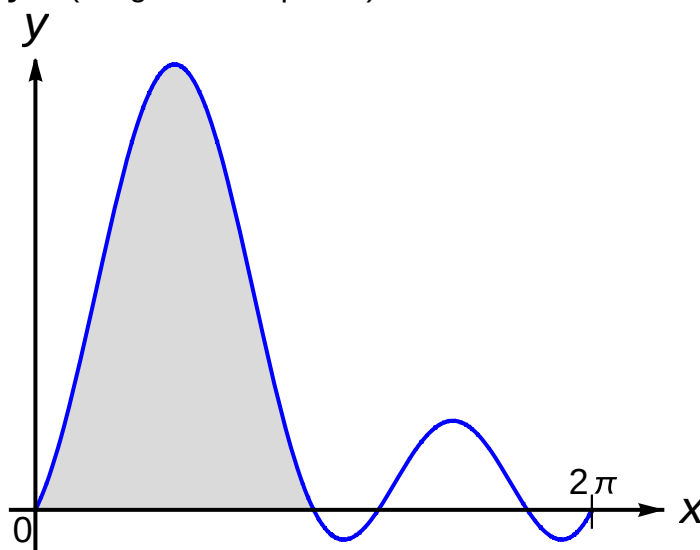
Note :

Correcteur :

Date :

Signature :

Problème 1, analyse (obligatoire, 13 points)



On a représenté ci-dessus le graphe de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par $f(x) = 3\sin^2(x) + 2\sin(x)$.

On donne également la dérivée seconde de f , $f''(x) = 6\cos^2(x) - 6\sin^2(x) - 2\sin(x)$.

- Calculer tous les zéros de f .
- Déterminer les coordonnées de tous les points du graphe de f à tangente horizontale.
- Établir une équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse π .
- Déterminer les coordonnées du point du graphe de f en lequel la pente de la tangente est maximale.
- Calculer l'aire de la surface grisée représentée ci-dessus.

Problème 2, algèbre linéaire (obligatoire, 13 points)

On donne l'application linéaire f , de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que f est bijective puis donner A^{-1} , la matrice de l'application réciproque de f .

b) Soit $x \neq 0$, montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée à ce vecteur ?

c) Calculer A^2 , puis démontrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}$ où n est un entier positif.

d) Vérifier que la matrice $A - A^{-1}$ est $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Donner une base du noyau de l'application linéaire h définie par B .

Montrer que le noyau et l'image de h sont égaux.

e) Soit $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque. Calculer $h(w)$, puis l'image de $h(w)$ par f .

On note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$. Calculer l'image de $h(w)$ par f^2 et par f^3 .

En déduire la matrice des applications linéaires $f \circ h$, $f^2 \circ h$ et $f^3 \circ h$.

Problème 3, nombres complexes

(à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (-2\sqrt{3} - i)z^2 + (7 + 2\sqrt{3}i)z - 7i$.

a) Prouver que le nombre complexe $z_0 = i$ est un zéro de ce polynôme, puis déterminer ses autres zéros.

Dans le plan de Gauss, on considère le triangle rectangle de sommets $z_0 = i$, $z_1 = \sqrt{3} + 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} - 2i$.

b) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $w = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$.

On considère encore la fonction complexe $f(z) = (1 + i)z + 1$.

c) Déterminer le point fixe de la fonction f , c'est-à-dire la solution de l'équation $f(z) = z$, puis donner l'interprétation géométrique détaillée la plus simple de f .

On définit la fonction g_n en composant n fois la fonction f avec elle-même :

$$g_n(z) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ fois}}(z).$$

d) Donner l'interprétation géométrique détaillée la plus simple de $g_4 = f \circ f \circ f \circ f$.

e) Déterminer le plus petit entier n tel que l'image du triangle de sommets $z_0 = i$, $z_1 = \sqrt{3} + 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} - 2i$ par la fonction g_n soit un triangle d'aire supérieure à 100.

Problème 4, géométrie

(à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

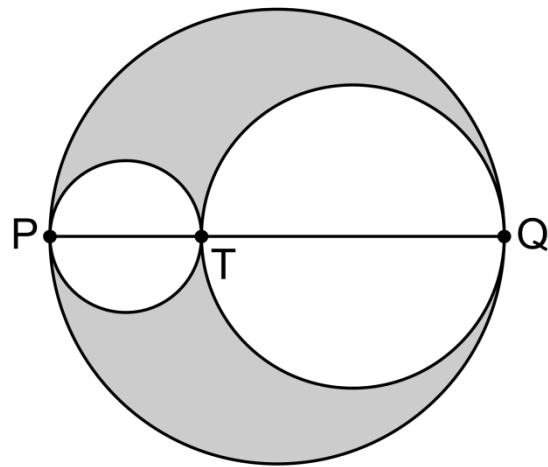
On donne le cercle $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 40x - 20y + 50 = 0$, la droite $t : y = -7x$ ainsi que les points $C_1(6;8)$, $B(7;1)$ et $G\left(\frac{15}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

- Déterminer le rayon r_2 et les coordonnées du centre C_2 du cercle Γ_2 .
- Établir l'équation du cercle Γ_1 centré en C_1 et passant par le point B .
Montrer que Γ_1 est tangent intérieurement à Γ_2 .
- Montrer que la droite t est tangente aux cercles Γ_1 et Γ_2 .
La droite t est tangente à Γ_2 en T , déterminer les coordonnées du point T .
- Donner l'équation de la tangente à Γ_1 en B .
- Calculer les coordonnées du symétrique B' du point B par rapport à la droite qui passe par le point G et par l'origine $O(0;0)$.
- Montrer que G est le centre d'un cercle Γ_3 tangent aux deux cercles précédents, intérieurement à Γ_2 et extérieurement à Γ_1 . Trouver le rayon de Γ_3 .

Problème 5, optimisation

(à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

On considère un point T sur le diamètre $[PQ]$ d'un cercle de diamètre 10. Ce point T détermine deux plus petits cercles de diamètres $[PT]$ et $[TQ]$. On notera x la distance de P à T .



- Montrer que l'aire $A(x)$ de la surface grisée, définie comme la surface du grand disque de diamètre $[PQ]$ duquel on a retiré les petits disques de diamètres $[PT]$ et $[TQ]$, est donnée par la formule

$$A(x) = \frac{\pi}{2}(10x - x^2)$$
- Déterminer la position de T sur le diamètre $[PQ]$, c'est-à-dire la valeur de x , pour laquelle l'aire $A(x)$ est maximale. Calculer cette aire maximale.
- Existe-t-il des positions de T sur le diamètre $[PQ]$ pour lesquelles l'aire $A(x)$ est strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètres $[PT]$ et $[TQ]$?
Si oui, lesquelles ?
- Déterminer les positions de T sur le diamètre $[PQ]$ pour lesquelles l'aire $A(x)$ est inférieure à la moitié de la somme des aires des deux disques de diamètres $[PT]$ et $[TQ]$.