



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - ÉTÉ 2014

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Problème 1 :	/ 13 points
Problème 2 :	/ 13 points
Problème 3 :	/ 12 points
Problème 4 :	/ 12 points
Problème 5 :	/ 12 points
Total :	/ 50 points

Prénom :

Numéro :

NOTE :

Date : Signature du correcteur :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1

Obligatoire

ANALYSE

Soit la fonction f , définie par $f(x) = \frac{x^2 - e^{x+1}}{x^2 + e^x}$

1.1 Justifier que $\mathbb{R}$ est bien l'ensemble de définition de f , puis déterminer ses asymptotes.

1.2 Vérifier que $f'(x) = \frac{(2x - x^2)(e^x + e^{x+1})}{(x^2 + e^x)^2}$,

puis étudier la croissance de f et donner les coordonnées de ses éventuels extremums.

1.3 Calculer $f(-1)$, puis tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.

1.4 Calculer l'angle θ entre les tangentes aux deux points du graphe d'abscisses 0 et 1 respectivement.

Problème 2

Obligatoire

PROBABILITÉS

Aujourd'hui, c'est l'examen de maturité de mathématiques au lycée de la Forêt Verte. Regardons cet examen de plus près.

Dans l'énoncé, il y a 4 questions d'analyse, 2 questions de probabilités, 1 question d'algèbre linéaire, 3 questions de géométrie et 2 questions d'arithmétique.

2.1 Les candidats ont le droit de traiter les questions dans l'ordre de leur choix. Dans combien d'ordres différents Bertrand peut-il traiter toutes les questions ?

2.2 Si l'on exige de plus que toutes les questions d'un même sujet soient traitées à la suite, mais dans l'ordre que l'on veut, dans combien d'ordres différents Ludivine peut-elle traiter toutes les questions ?

Si l'on demande aux candidats de ne traiter qu'une seule question de chacun des cinq sujets.

2.3 De combien de manières différentes Christian peut-il choisir les questions et dans combien d'ordres différents peut-il alors les traiter ?

2.4 Léa a choisi 5 questions au hasard, quelle est la probabilité qu'elle ait fait un choix compatible avec la consigne de la question 2.3 ?

Les rédacteurs de l'examen estiment que la probabilité qu'un candidat obtienne une note suffisante est de 58 %.

2.5 Calculer la probabilité qu'exactement trois quarts des élèves du lycée obtiennent une note suffisante à cet examen, sachant qu'il y a 60 élèves qui passent l'examen de maturité dans cet établissement scolaire.

2.6 En utilisant l'approximation par la loi normale, déterminer la probabilité pour que moins de 45 % de ces 60 élèves obtiennent une note insuffisante à cet examen.

2.7 La société pour l'Encouragement des Mathématiques décide d'offrir un prix aux meilleurs des 375 candidats de la région. Pour l'obtenir, il convient de figurer parmi les 8% des meilleurs résultats. Sachant que cet examen est noté sur 180 points, que les résultats des candidats suivent une loi normale de moyenne 104 points et d'écart-type de 23 points, déterminer combien il faut obtenir de points au minimum pour décrocher ce prix.

Problème 3

Au choix avec les problèmes 4 et 5

SUITES

On note I_k l'intégrale suivante : $I_k = \int_0^1 x(1-x)^{k-1} dx$, où k est un nombre entier strictement positif.

3.1 En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $I_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

3.2 On pose $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$. Calculer S_1 , S_2 et S_3 .

3.3 Prouver à l'aide d'une démonstration par récurrence que $S_n = \frac{n}{n+1}$.

3.4 Montrer que la suite $\{S_n\}$ est strictement croissante et calculer $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Problème 4

Au choix avec les
problèmes 3 et 5

NOMBRES COMPLEXES

Considérons l'équation $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$, où z désigne un nombre complexe.

- 4.1 Vérifier que 2 est une solution de cette équation.
- 4.2 Déterminer toutes les solutions de cette équation. Donner ces solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- 4.3 Représenter les nombres complexes $a = -2 - 2i$, $b = 2$, $c = 2 + 4i$ et $d = -2 + 2i$ dans le plan de Gauss et prouver que $abcd$ forme un parallélogramme.
- 4.4 Appelons e l'image du nombre c par la rotation de centre b et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et f l'image du nombre c par la rotation de centre d et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
Calculer e et f , puis les représenter dans le plan de Gauss.
- 4.5 Montrer que : $\frac{f-a}{e-a} = i$.
- 4.6 Montrer que le triangle aef est isocèle en a et rectangle en a , en comparant les modules et les arguments des deux membres de l'égalité de la question 4.5.

Problème 5

Au choix avec les
problèmes 3 et 4

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(3;4;4)$ et $D(5;4;-2)$.

- 5.1 Montrer que le triangle ABC est isocèle.
- 5.2 Déterminer les équations paramétriques de la droite d , perpendiculaire au triangle ABC et passant par le sommet C de ce triangle.
- 5.3 Montrer que l'équation cartésienne du plan α contenant le triangle ABC est :
 $4x + 3y - 3z - 12 = 0$.
- 5.4 Calculer l'aire du triangle ABC , la distance du point D au plan α ainsi que le volume du tétraèdre $ABCD$.

On considère un deuxième plan β , d'équation $6x + 3y + 2z - 18 = 0$ et le point $E(7;9;-1)$.

- 5.5 Calculer l'angle aigu φ entre le plan β et le plan contenant les axes Oy et Oz .
 - 5.6 Le point $S(-1;1;3)$ est le symétrique du point E par rapport à un plan π .
Déterminer une équation cartésienne de ce plan π .
-