



**EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - HIVER 2013**

**MATHÉMATIQUES**  
**niveau supérieur**

Durée : 4 heures

Candidat :

Problème 1 : /14 points  
Problème 2 : /12 points  
Problème 3 : /12 points  
Problème 4 : /12 points  
Problème 5 : /12 points  
**Total : /50 points**

Nom : .....  
Prénom : .....  
Numéro : .....

*Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :*

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,*
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.*

Correcteur : Date : ..... Signature : ..... Note :

**Problème 1 : Analyse (obligatoire, 14 points)**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 4}$ .

- a) Étudier la fonction  $f$ . On demande :
- L'ensemble de définition et le signe de  $f$ .
  - Les points d'intersection du graphe et des axes de référence.
  - Les équations des éventuelles asymptotes.
  - Les coordonnées des éventuels extremums ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance.
  - La représentation graphique en utilisant comme échelle une unité égale à deux carreaux.
- b) Calculer une primitive de  $f$ .
- c) Calculer l'aire du domaine borné limité par le graphe de  $f$  et la tangente au graphe de  $f$  en son maximum.
- d) Montrer que  $\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{3} + \frac{4}{3x^2}$  et donner une primitive de  $\frac{1}{f}$ .

**Problème 2 : Probabilité (obligatoire, 12 points)**

Une boîte rouge contient 4 vrais billets de banque et 6 faux. Une boîte jaune contient 4 vrais billets et 2 faux. Un jeu consiste à lancer un dé puis à tirer au hasard, successivement et sans remise, 2 billets dans la même boîte. Si le nombre de points obtenus avec le dé est inférieur ou égal à 4, vous tirez les billets dans la boîte rouge, sinon vous tirez les billets dans la boîte jaune.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir 1 vrai billet et 1 faux billet ?
- b) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des faux billets ?
- c) Si vous n'avez obtenu que des faux billets, quelle est la probabilité que vous ayez tiré les billets dans la boîte jaune ?

On joue 5 parties de ce jeu en remettant à chaque fois les billets dans la configuration initiale.

- d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un vrai billet ?
- e) Quelle est la probabilité que dans exactement trois parties vous n'obteniez que des faux billets ?

**Problème 3 : Géométrie de l'espace (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)**

On donne les points  $P(2; 1; 3)$ ,  $Q(2; 5; 3)$ ,  $A(-9; 8; 6)$  et  $B(7; -2; 4)$  ainsi que la droite  $d$  d'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le plan  $\pi$  contient les points  $P$  et  $Q$  et est parallèle à  $d$ .

- a) Donner une équation vectorielle du plan  $\pi$ .
- b) Décrire la position du plan  $\pi$  par rapport aux axes de référence, et donner son équation cartésienne.
- c) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite  $d$  et de la droite  $g$  passant par  $A$  et  $B$ . Calculer l'angle aigu entre ces deux droites.
- d) Calculer la distance de la droite  $d$  au plan  $\pi$ .

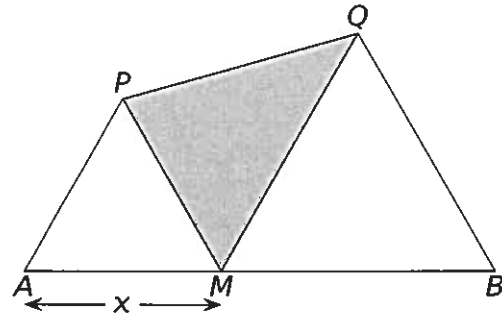
Le point  $R$  se trouve sur la droite  $d$  et forme avec les points  $P$  et  $Q$  un triangle rectangle en  $R$ .

- e) Calculer les coordonnées de ce point  $R$ .
- f) Décrire précisément l'ensemble  $\mathcal{H}$  de tous les points équidistants des trois points  $P$ ,  $Q$  et  $R$ . (On peut répondre à cette question sans connaître les coordonnées de  $R$ .) Donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{H}$ .

**Problème 4 : Optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)**

On place un point  $M$  à une distance  $x$  de  $A$  sur un segment  $AB$  de longueur 5.

On construit alors les deux triangles équilatéraux  $AMP$  et  $MBQ$  (avec  $P$  et  $Q$  du même côté du segment  $AB$  comme le montre le dessin ci-contre).



a) Optimisation de l'aire du triangle  $MPQ$ .

- Calculer, en fonction de  $x$ , l'aire du triangle  $PMQ$ . Utiliser que celle-ci est donnée par  $\frac{1}{2} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{MQ} \cdot \sin(\widehat{PMQ})$ .
- Déterminer  $x$  pour que l'aire du triangle  $MPQ$  soit maximale.

b) Optimisation du périmètre du triangle  $MPQ$ .

- Montrer, à l'aide du théorème du cosinus dans le triangle  $MPQ$ , que le côté  $PQ$  est de longueur  $\sqrt{3x^2 - 15x + 25}$ .
- Déterminer  $x$  pour que le périmètre du triangle  $MPQ$  soit minimal.

**Problème 5 : Nombres complexes (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)**

Soit le polynôme  $f(z) = z^2 + 2z + 5$  d'une variable complexe  $z$ .

- Déterminer les zéros de  $f$ , c'est-à-dire les nombres complexes  $z$  tels que  $f(z) = 0$ .
- Quels sont les nombres complexes  $z$  tels que  $f(z) = 2z$ ?
- Soit  $y \in \mathbb{R}$ , calculer  $f(-1 + iy)$ . Montrer que, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , la valeur obtenue est réelle, et toujours inférieure ou égale à 4.
- On considère un nombre complexe de la forme  $z = 1 + iy$  avec  $y \in \mathbb{R}$ . Déterminer la partie réelle  $u$  et la partie imaginaire  $v$  de  $f(1 + iy)$  en fonction de  $y$ .
- Ayant écrit sous d)  $u$  et  $v$  en fonction de  $y$ , éliminer  $y$  pour avoir  $u$  en fonction de  $v$ . L'équation obtenue est celle d'une courbe dans le plan de Gauss des nombres  $u + iv$ ; quelle est la nature de cette courbe?