



Examen suisse de maturité, session d'été 2013
Mathématiques, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : / 14 points

Problème 2 : / 12 points

Problème 3 : / 12 points

Problème 4 : / 12 points

Problème 5 : / 12 points

Total : / 50 points

Note :

Correcteur :

Date :

Signature :

Problème 1, analyse (obligatoire, 14 points)

On considère les fonctions réelles du type $f : x \mapsto y = \frac{1}{2}(e^x - 1) \cdot (e^x - m)$ où m est un nombre réel.

- a) Vérifier que $f'(x) = \frac{1}{2}(2e^x - m - 1) \cdot e^x$.
- b) Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles le graphe de la fonction f possède exactement un point à tangente horizontale.
Calculer ensuite, en fonction de m , l'abscisse de ce point.

On pose $m = 8$, donc, pour la suite du problème $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1) \cdot (e^x - 8)$.

- c) Calculer les zéros de f .
- d) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f .
- e) Calculer les coordonnées du point du graphe de f à tangente horizontale.
- f) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.
- g) Vérifier que $f(x)$ peut aussi s'écrire $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - 9e^x + 8)$ puis calculer l'aire de la surface fermée délimitée par le graphe de f et l'axe des abscisses.
- h) On considère un point $A(x; f(x))$ sur le graphe de f et dans le quatrième quadrant, ainsi que les points $B(x; 0)$ et $C(0; f(x))$.
Déterminer le périmètre du rectangle $OBAC$ ainsi formé (O est l'origine du repère), puis trouver la valeur de x pour laquelle le périmètre du rectangle $OBAC$ est maximal.

Problème 2, géométrie (obligatoire, 12 points)

On donne le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 120 = 0$, la droite $d : x + 2y - 15 = 0$ ainsi que les points $P(12; -6)$ et $T(9; 3)$.

- Déterminer le rayon r et les coordonnées du centre C du cercle Γ .
- Établir l'équation du cercle Γ' centré en $C'(6; -3)$ et passant par le point P .
- Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents.
Vérifier encore que le point P appartient également au cercle Γ .
- Montrer que la droite d est tangente au cercle Γ' .
- Déterminer les points d'intersection A et B de la droite d et du cercle Γ .
- Montrer que la droite (PT) est l'une des bissectrices des droites (PA) et (PB) .

Problème 3, nombres complexes

(à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On donne la fonction complexe f à variable complexe z définie par $f(z) = z^2 - i \cdot z$.

- Déterminer les zéros de f .
- Déterminer les zéros de la fonction g définie par $g(z) = f(z^3)$.
Exprimer ces zéros sous forme algébrique et trigonométrique.
- Déterminer les points fixes de f , c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(z) = z$.
- Déterminer l'ensemble des nombres complexes dont l'image par l'application f est un nombre réel. Représenter cet ensemble dans le plan de Gauss.
- Résoudre l'équation $f(z) = 9 + 3i$.
- Prouver que $f(2+i) = 2 \cdot (2+i)$ et que $f(3+i) = 3 \cdot (3+i)$.
Prouver encore que si $\text{Im}(z) = 1$, on a l'égalité $f(z) = \text{Re}(z) \cdot z$.

Problème 4, algèbre linéaire

(à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On donne une application linéaire f par sa matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer les valeurs propres de f .
Déterminer un vecteur propre associé à chaque valeur propre de f .

On définit une autre application linéaire g par sa matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- b) Donner la matrice de l'application linéaire réciproque de g .
- c) Vérifier que la matrice $B^4 = B \cdot B \cdot B \cdot B$ est $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation géométrique précise de l'application linéaire qu'elle représente.
- d) Calculer la matrice $D = B \cdot A \cdot B^{-1}$ puis en déduire la matrice D^{10} .
- e) Montrer que l'application linéaire h définie par la matrice $4A + B^4$ n'est pas bijective.
Déterminer son noyau.

Problème 5, probabilités

(à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Jules a toujours dans sa poche trois clés d'apparence identique. Une seule des clés ouvre la porte de son appartement.

Quand Jules rentre chez lui et qu'il n'a pas bu d'alcool, il essaie successivement les clés en éliminant celles qui n'ouvrent pas la porte, jusqu'à ce qu'il trouve la bonne clé.

- a) Quelle est la probabilité que Jules trouve la bonne clé
- au premier essai ?
 - au deuxième essai ?
 - au troisième essai ?

Quand Jules rentre chez lui éméché, il n'élimine pas la clé qu'il a déjà essayée. Il tente d'ouvrir sa porte en choisissant au hasard une des trois clés, puis, si ce n'est pas la bonne, il la remet dans sa poche, choisit à nouveau au hasard une des trois clés et procède à un nouvel essai. Il répète l'opération jusqu'à ce qu'il trouve la bonne clé. Dans cette situation :

- b) Quelle est la probabilité que Jules trouve la bonne clé
- au premier essai ?
 - au deuxième essai ?
 - au troisième essai ?
- c) En déduire, en fonction de n , la probabilité que Jules trouve la bonne clé lors de l'essai numéro n .
- d) Quelle est théoriquement la probabilité que le nombre d'essais soit un nombre impair ?

Pour les deux dernières questions, on suppose que la probabilité que Jules rentre chez lui éméché est égale à $\frac{1}{10}$.

- e) Un certain jour Jules rentre chez lui. Quelle est la probabilité qu'il lui faille moins de trois essais pour ouvrir sa porte ?
- f) Sachant qu'un certain jour Jules a réussi à ouvrir sa porte lors du troisième essai, calculer la probabilité qu'il soit rentré éméché ce jour-là.