



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2012

DF MATHEMATIQUES, NIVEAU SUPERIEUR

Durée : 4 heures

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :
- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- deux problèmes à choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur(s) : Date : Signature(s) : Note :

Problème 1 : Analyse (obligatoire, 17 points)

On considère une fonction f telle que :

- f est définie et continue sur $\mathbb{R}$;
- l'ordonnée à l'origine de f vaut -1 ;
- la fonction dérivée de f , notée f' , est donnée par la formule :

$$f'(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1.1 La fonction dérivée f' est-elle continue en $x = 0$?
- 1.2 Déterminer la fonction f lorsque $x < 0$ et lorsque $x \geq 0$.
- 1.3 Etudier la variation de la fonction f et donner les coordonnées de ses éventuels extremums.
- 1.4 Etudier la courbure de la fonction f et donner l'abscisse de ses éventuels points d'inflexion.
- 1.5 Représenter la fonction f pour des valeurs de x comprises entre -4 et 4 (2 cm par unité pour l'axe O_x et 8 cm par unité pour l'axe O_y).
- 1.6 Déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f au point d'abscisse 3.



Problème 2 : Géométrie (obligatoire, 13 points)

Sur une carte de géographie, un vélodrome circulaire est représenté par un cercle Γ d'équation

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 16x - 16y + 103 = 0$$

Le point de départ se situe en $D(11; 4)$. Une ligne électrique qui survole le vélodrome est aussi représentée sur la carte par une droite e d'équation $4x - 3y - 10 = 0$.

- 2.1 Vérifier que le point D appartient au cercle Γ .
- 2.2 Déterminer le rayon r et les coordonnées du centre C du cercle Γ .
- 2.3 Un chemin rectiligne représenté par une droite d est tangent au cercle Γ au point D . Déterminer l'équation de cette tangente d .
- 2.4 La ligne électrique survole-t-elle exactement le centre C du vélodrome? Justifier la réponse par calcul.
- 2.5 Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites e et d .
- 2.6 Montrer qu'il existe un cercle Γ' centré en $E(2; \frac{7}{2})$ qui est tangent à la fois au cercle Γ et à la droite e . Donner l'équation de ce cercle Γ' .
- 2.7 Représenter le cercle Γ , le point D , la droite e , la droite d et le cercle Γ' dans un repère d'unité 1 cm. Placer l'axe O_y à 3 cm du bord gauche de la feuille.

Problème 3 : Probabilités (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Au "Cirque des Belles Planètes", la ménagerie compte 6 chevaux blancs, 5 chevaux noirs, 9 chevaux gris, 4 superbes tigres, 8 canards, 7 otaries, 1 petite girafe et 1 vieil éléphant. Chaque jour, le cirque organise pour les visiteurs une promenade en calèche, tirée par deux chevaux. Le cocher de cette calèche choisit au hasard parmi tous les chevaux les deux qui seront de service.

- 3.1 Calculer la probabilité des événements suivants :
 - A : "Les deux chevaux choisis sont blancs".
 - B : "L'un des deux chevaux, au moins, est blanc".
 - C : "Les deux chevaux sont de la même couleur".
- 3.2 Sachant que les deux chevaux de l'attelage sont de couleurs différentes, calculer la probabilité que l'un soit blanc.
- 3.3 Eric, qui adore les chevaux, vient trois jours de suite pour effectuer une promenade en calèche. Calculer la probabilité que les deux chevaux soient un seul jour de la même couleur.
- 3.4 On estime que la durée de ces promenades en calèche est une variable aléatoire X de moyenne 72 minutes et d'écart-type 150 secondes. Calculer la probabilité que la promenade d'aujourd'hui dure entre 71 et 75 minutes.
- 3.5 Déterminer le temps t pour lequel la probabilité qu'une promenade dure plus que t minutes est égale à 80,511 %.



Problème 4 : Algèbre linéaire (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

On donne une application linéaire f par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

4.1 Déterminer les valeurs propres de f . Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres de f .

4.2 Donner une interprétation géométrique précise de l'application f .

On définit une autre application linéaire g par sa matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3 Montrer que le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de g et donner la valeur propre correspondante.

4.4 Calculer la matrice associée à l'application linéaire $g \circ f$.
Déterminer tous les vecteurs propres de $g \circ f$.

4.5 Calculer le noyau de l'application linéaire $f - g$.
Déterminer également les matrices $(A - B)^n$ où n est un entier positif non nul.

Problème 5 : Optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

On considère un losange dont les demi-diagonales sont de longueur x et y , comme illustré sur la figure ci-dessous. Le périmètre du losange est de 20 cm.

5.1 Déterminer les longueurs x et y des demi-diagonales pour lesquelles l'aire de ce losange est maximale.

5.2 Prouver que l'aire obtenue est bien l'aire maximale et donner la valeur de cette aire maximale.

