



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - ÉTÉ 2012

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Problème 1 :	/ 13 points
Problème 2 :	/ 13 points
Problème 3 :	/ 12 points
Problème 4 :	/ 12 points
Problème 5 :	/ 12 points
Total :	/ 50 points

Prénom :

Numéro :

Correcteur : Date : Signature :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 (13 points)

Obligatoire

ANALYSE

On considère les fonctions du type $f : x \mapsto \frac{ax+b}{x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

- 1.1 Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles le graphe de f admet en son point d'abscisse $x_0 = -3$ une tangente d'équation $y = x + 6$.

Pour la suite de ce problème, on pose $a = 1$ et $b = -3$ et donc $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$.

- 1.2 Montrer que f peut aussi s'écrire : $f(x) = 1 - \frac{4}{x+1}$.

- 1.3 Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé, après avoir déterminé les équations de toutes ses asymptotes.

- 1.4 Calculer les abscisses des points du graphe de f en lesquels la tangente passe par l'origine.

On appelle S la surface fermée délimitée par le graphe de f et les axes Ox et Oy .

- 1.5 Hachurer la surface S et calculer son aire.
- 1.6 Calculer le volume du corps engendré par la rotation de la surface S autour de l'axe des abscisses.

Veillez rendre ces feuilles avec votre travail. Merci !

Problème 2 (13 points)**Obligatoire****ALGÈBRE LINÉAIRE**

On donne une application linéaire f par sa matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- 2.1 Déterminer les valeurs propres de f , puis donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre.
- 2.2 Donner une interprétation géométrique précise de l'application f .
- 2.3 Dédire une interprétation géométrique précise de l'application $f \circ f$.

On définit une autre application linéaire g par sa matrice $B = -A$.

- 2.4 Montrer que les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g et donner une interprétation géométrique précise de l'application g .
- 2.5 Calculer la matrice C associée à l'application $g \circ f$ et donner une interprétation géométrique précise de l'application $g \circ f$.

On définit encore une autre application linéaire h par sa matrice $D = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

- 2.6 Déterminer les valeurs de $t \in \mathbf{R}$ pour lesquelles la matrice $A + tD$ n'est pas inversible.
 - 2.7 Calculer le noyau de l'application linéaire $(f-h)$.
-

Problème 3 (12 points)**Au choix avec les
problèmes 4 et 5****SUITES**

Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 + n$, pour tout nombre entier $n \geq 1$.

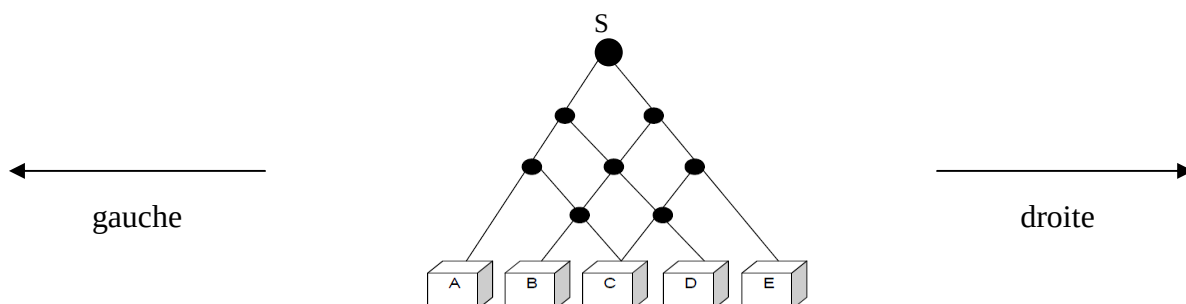
On définit également la suite (v_n) ainsi : $v_n = 4u_n - 6n + 21$, pour tout nombre entier $n \geq 1$.

- 3.1 Calculer u_2 , u_3 , v_1 , v_2 et v_3 .
- 3.2 Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et en donner la raison r .
Exprimer ensuite v_n en fonction de n .
- 3.3 Prouver que $u_n = \frac{19}{4} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{6n-21}{4}$.
- 3.4 En déduire que pour tout nombre entier $n \geq 1$, u_n peut s'écrire comme $a_n + g_n$ où (a_n) est une suite arithmétique et (g_n) une suite géométrique.
Donner les raisons r_a et r_g de ces deux suites.
- 3.5 Calculer la somme S_{300} des 300 premiers termes de la suite (u_n) :
$$S_{300} = u_1 + u_2 + \dots + u_{300}.$$

Veuillez rendre ces feuilles avec votre travail. Merci !

Problème 4 (12 points)**Au choix avec les problèmes 3 et 5****PROBABILITÉS**

Un jeu consiste à laisser rouler une bille sur un plan incliné du point S vers l'une des cinq boîtes A, B, C, D et E. Les parcours possibles des billes sont illustrés sur le schéma suivant :



À chaque point ●, la bille a une probabilité p de tomber à gauche et $1-p$ de tomber à droite.

- 4.1 Calculer en fonction de p la probabilité qu'une bille lâchée en S tombe dans la boîte D, puis déterminer pour quelle valeur de p cette probabilité est maximale.

Pour la suite du problème, on pose $p = \frac{1}{2}$.

- 4.2 Quelle est la probabilité que deux billes lâchées successivement tombent dans la même boîte ?
- 4.3 Quelle est la probabilité que cinq billes lâchées successivement tombent toutes dans des boîtes différentes ?
- 4.4 Combien faut-il lâcher de billes au minimum pour que la probabilité qu'au moins une bille tombe dans la boîte A soit supérieure à 95 % ?
- 4.5 On appelle boîtes extérieures les boîtes A et E. Calculer la probabilité qu'une bille lâchée de S tombe dans une boîte extérieure, puis calculer à l'aide de la loi normale l'estimation de la probabilité que plus de 30 billes tombent dans une boîte extérieure lorsqu'on lâche successivement 100 billes en S.

Problème 5 (12 points)**Au choix avec les problèmes 3 et 4****GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE**

On donne les plans $\alpha : 3x + 4y + 12z - 169 = 0$ et $\beta : 3x + 4y - 12z + 169 = 0$.

- 5.1 Montrer que l'origine O est à égale distance des deux plans α et β .
- 5.2 Déterminer les coordonnées du point A du plan α le plus proche de O . Déterminer les coordonnées du point B du plan β le plus proche de O .
- 5.3 Déterminer l'équation cartésienne du plan (OAB) .

Pour la suite, on prendra $4x - 3y = 0$ comme équation du plan (OAB) .

- 5.4 Déterminer les équations paramétriques de la droite d , droite d'intersection de α et β .
- 5.5 Calculer les coordonnées du point P , intersection de la droite d et du plan (OAB) .
- 5.6 Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d , tels que les deux tétraèdres $OABM_1$ et $OABM_2$ aient chacun un volume égal à 200.

Veuillez rendre ces feuilles avec votre travail. Merci !