



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2011

Mathématiques niveau supérieur

Durée : 4 heures

Note :

Candidat : Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires
- puis deux problèmes à choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur(s) : Date :

Signature(s) :

Problème 1 : Analyse (obligatoire ; 16 points)

On considère la fonction f_k donnée par $f_k(x) = e^{-x} + kx - 1$ où k est un nombre réel.

1.1 Etudier f_k pour $k = \frac{1}{2}$.

Indication : un des zéros de $f_{\frac{1}{2}}$ vaut environ 1.594.

On demande

- l'ensemble de définition, les équations des asymptotes éventuelles, les coordonnées des éventuels extremums ainsi que les intervalles de croissance / décroissance ;
- la représentation graphique (unité : 5 carreaux).
- l'équation de la tangente t au graphe de $f_{\frac{1}{2}}$ au point d'abscisse $x = -1$ et sa représentation sur le dessin précédent.

1.2 Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la tangente au graphe de f_k au point d'abscisse $x = 0$ fait un angle de 30° avec l'axe des abscisses.

1.3 Déterminer la valeur de k de sorte que 2 soit un zéro de f_k .

Calculer alors l'aire de la surface limitée par le graphe de cette fonction f_k et l'axe des abscisses.

Problème 2 : Géométrie (obligatoire ; 14 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle Γ centré à l'origine et de rayon 2, ainsi que le point $P(\lambda; 2)$, où λ est un nombre réel strictement positif.

De P , on trace les tangentes a et b au cercle Γ . On appelle A et B les points de contact respectifs des tangentes a et b avec le cercle Γ .

2.1 Calculer les coordonnées des points A et B .

2.2 Calculer les coordonnées du point M intersection des droites (AB) et (OP) .

2.3 Pour quelle valeur de λ , la droite (AB) est-elle de pente égale à -2 ?

2.4 Calculer l'aire du quadrilatère $OAPB$ en fonction de λ et déterminer pour quelle valeur de λ cette aire est égale à 10.

2.5 On pose $\lambda = 3$. Déterminer l'équation d'une tangente c au cercle Γ telle que le triangle formé par les droites a , b et c soit isocèle de sommet P .

Problème 3 : Suites (à choix avec les problèmes 4 et 5 ; 10 points)

En mélangeant un litre d'eau à la température T et un litre d'eau à la température T' , on obtient deux litres d'eau à la température $\frac{T+T'}{2}$.

- A un litre d'eau à la température $T_1 = 80^\circ \text{C}$, on ajoute un litre d'eau à la température 20°C , ce qui nous donne deux litres d'eau à la température T_2 .
- On prélève alors un litre sur les deux litres ainsi obtenus et on lui ajoute un litre d'eau à la température 20°C , ce qui nous donne deux litres à la température T_3 .
- On prélève alors un litre sur les deux litres ainsi obtenus et on lui ajoute un litre d'eau à la température 20°C , ce qui nous donne deux litres à la température T_4 .
- En continuant ainsi, on fabrique une suite de températures (T_n) , telle que T_{n+1} est la température d'un mélange d'un litre d'eau à la température T_n avec un litre d'eau à la température 20°C .

3.1 Calculer les températures T_2 , T_3 et T_4 .

3.2 Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .

On considère maintenant la suite (u_n) définie par $u_n = T_n - 20$.

3.3 Vérifier que la suite (u_n) est géométrique, donner le 1^{er} terme et la raison puis exprimer u_n en fonction de n .

3.4 Trouver une formule permettant d'exprimer T_n en fonction de n .

3.5 Déterminer combien de fois il faudra répéter ces mélanges pour obtenir deux litres d'eau à une température inférieure à 21°C .

3.6 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

3.7 Que vaut la moyenne $\bar{T}$ des 40 premières températures T_1 à T_{40} ?

Problème 4 : Optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 5 ; 10 points)

On désire construire un petit pavillon permettant d'observer le ciel à l'abri du froid. Cette construction prendra la forme d'un cylindre de bois surmonté d'une demi-sphère de plexiglas et aura un volume de $\frac{22}{3} \pi \text{ m}^3$.

Le prix au m^2 de la coupole en plexiglas est de 125 CHF ; celui au m^2 de la paroi en bois est de 50 CHF. La construction n'a pas de fond.

4.1 Si h désigne la hauteur du cylindre et x le rayon commun du cylindre et de la demi-sphère, montrer que

$$h = \frac{22 - 2x^3}{3x^2}$$

4.2 Montrer que le coût de la construction est donné par

$$C(x) = 550 \pi \left(\frac{4 + x^3}{3x} \right)$$

4.3 Déterminer x et h pour que le coût de la construction soit minimal.

Problème 5 : Probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 4 ; 10 points)

Ignorant les recommandations en vigueur, un quart des 36 touristes suisses partis en groupe en voyage en Malaisie ont négligé de se faire vacciner contre la malaria avant leur départ.

Huit de ces 36 touristes mangent le lundi soir au restaurant de l'hôtel Royal Garden de Kuala Lumpur.

- 5.1 Quelle est la probabilité que, parmi ces 8 touristes, la proportion de touristes non vaccinés soit la même que dans l'ensemble du groupe ?
- 5.2 Quelle est la probabilité que, parmi ces 8 touristes, il y en ait au moins deux qui n'aient pas été vaccinés ?

De manière générale, on sait que le nombre de cas de malaria en 2010 chez les touristes non vaccinés en Malaisie suit une loi normale d'espérance 1340 et d'écart-type 40.

- 5.3 Calculer la probabilité pour que le nombre de cas de malaria chez des touristes non vaccinés soit au plus égal à 1468 pour l'année 2010.
- 5.4 Si l'on constate que la proportion du nombre de cas de malaria chez les touristes non vaccinés en 2010 n'a pas dépassé 25%, combien cela représente-t-il de touristes atteints par la maladie au maximum ?
- 5.5 Si l'on sait qu'en 2010 le nombre de cas de malaria chez les touristes non vaccinés a été supérieur à 1300, quelle est la probabilité que le nombre de ces touristes atteints par la malaria soit d'au moins 1260 et d'au plus 1460 ?