



Examen suisse de maturité, session d'été 2011

Mathématiques, niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur :

Date :

Signature :

Problème 1, analyse (obligatoire, 16 points)

On donne la fonction $f : x \mapsto y = (x^2 - 3x) \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

a) Étudier la fonction f . On demande :

- L'ensemble de définition;
- Les points d'intersection du graphe et des axes de références;
- Les équations des éventuelles asymptotes;
- Les coordonnées des éventuels extremums ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance;
- La représentation graphique avec une unité égale à deux carreaux.

b) La droite t est tangente au graphe de f au point T d'abscisse $x_0 = -2$.

- Établir une équation de cette tangente;
- Vérifier par calcul que t passe par le point $I(3; 0)$;
- Dessiner cette tangente sur le même graphique que la fonction f .

c) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par le graphe de f et la droite t .

Problème 2, algèbre linéaire (obligatoire, 10 points)

On donne une application linéaire f par sa matrice $M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

- Prouver que f est bijective.
- Calculer la matrice de l'application réciproque.
- Déterminer les valeurs propres de f .
- Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
Montrer ensuite que les vecteurs ainsi trouvés sont orthogonaux entre eux.
- Calculer M^2 et M^3 .
- En déduire les matrices M^{2n} et M^{2n+1} où n est un nombre entier non nul.
- Donner une interprétation géométrique précise de l'application f .

Problème 3, nombres complexes

(à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On considère l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

- Résoudre l'équation $f(z) = z$.
- Déterminer et représenter dans le plan de Gauss tous les nombres z tels que $|f(z)| = 4$.
- On considère le nombre complexe $z_0 = 4 - 4i$ et on définit $z_n = f(z_{n-1})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 .
- Interpréter géométriquement l'application f .
- Représenter dans le plan de Gauss la ligne polygonale $z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$.
Calculer la longueur de chacun des segments $z_0 z_1, z_1 z_2, z_2 z_3$ et $z_3 z_4$.
En déduire la longueur de la ligne polygonale $z_0 z_1 z_2 z_3 \dots z_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Problème 4, géométrie dans l'espace

(à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On donne les plans $\alpha : x - y - z = 0$ et $\beta : x + y - 5 = 0$, ainsi que la droite $e : \begin{cases} x = 9 + 2k \\ y = -7 + 5k \\ z = -7 - k \end{cases}$.

On appelle d la droite d'intersection des plans α et β .

- Déterminer des équations paramétriques de la droite d'intersection d .
- Déterminer l'angle aigu entre le plan α et la droite e .
- Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux droites d et e , puis trouver l'équation du plan π contenant d et dont $\vec{n}$ est un vecteur directeur.
- Trouver les points de la droite e situés à distance $9\sqrt{2}$ du plan β .

Problème 5, probabilités

(à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Feuille-caillou-ciseaux est un jeu où deux joueurs choisissent simultanément l'un des trois coups possibles (feuille, caillou ou ciseaux) en le symbolisant de la main. Les ciseaux battent la feuille (en la coupant), le caillou bat les ciseaux (en les émoussant) et la feuille bat le caillou (en l'enveloppant). Dans les autres cas, la partie est nulle.

Tom et Jerry adoptent chacun une stratégie bien définie :

- Tom ne joue jamais caillou, mais choisit indifféremment feuille ou ciseaux;
- Jerry choisit ciseaux deux fois sur sept et choisit caillou deux fois moins souvent.

- Déterminer la probabilité que Jerry joue caillou, la probabilité que Jerry joue feuille, puis représenter toutes les issues possibles d'une partie par un diagramme en arbre.
- Vérifier que Tom a une probabilité de gagner la partie égale à $\frac{5}{14}$, puis calculer la probabilité que Jerry gagne la partie et la probabilité que la partie soit nulle.
- Calculer la probabilité que, dans une partie, au moins un joueur n'ait pas choisi ciseaux.
- Si Tom remporte la partie, quelle est la probabilité que Jerry ait choisi caillou ?
- Calculer la probabilité que, dans une partie, Tom ait choisi ciseaux, sachant que Jerry a choisi feuille.
- Tom et Jerry effectuent dix parties. Quelle est la probabilité que Tom remporte au moins huit d'entre elles ?