

MATHÉMATIQUES, NIVEAU SUPÉRIEUR

Durée : 4 heures

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :
 - les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires
 - puis deux problèmes à choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur(s) : Date : Signature(s) : Note :

Problème 1 : Analyse (obligatoire, 16 points) On considère la fonction f_m donnée par $f_m(x) = (x + m) \cdot e^{-x}$, avec $m \in \mathbb{R}$.

- 1.1 Déterminer le zéro de la fonction, les équations des éventuelles asymptotes horizontales au graphe de f_m et le point à tangente horizontale H_m du graphe de f_m .
- 1.2 Ecrire $f_1(x)$ et $f_2(x)$ et dessiner dans le même repère les graphes de ces deux fonctions.
- 1.3 Pour quelles valeurs de x a-t-on $f_2(x) - f_1(x) < \frac{1}{2}$?
- 1.4 On considère le domaine fermé délimité par l'axe O_x , l'axe O_y et les graphes de f_1 et de f_2 . Hachurer ce domaine et calculer son aire.
- 1.5 La tangente au point $T(x_0; y_0)$ du graphe de f_1 , passe par le point $A(-2; 0)$. Calculer les valeurs de x_0 .

Problème 2 : Géométrie dans l'espace (obligatoire, 10 points)

Dans l'espace, on considère les deux points $A(1; 2; 5)$ et $C(4; 6; 0)$ ainsi que les deux droites :

$$l : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 7\lambda \\ z = 5 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad m : \begin{cases} x = 4 + 7\mu \\ y = 6 + \mu \\ z = 0 \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

- 2.1 Quelle est la position relative de ces deux droites et quel est leur angle ?
- 2.2 On appelle plan médiateur Π du segment $[AC]$, le plan formé par tous les points équidistants de A et C .
Montrer que l'équation cartésienne de Π est : $3x + 4y - 5z - 11 = 0$.
- 2.3 Déterminer le point B , intersection de Π avec l , ainsi que le point D , intersection de Π avec m .
- 2.4 Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
- 2.5 Soit le point $M\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Déterminer les équations de la droite n perpendiculaire à la droite (AM) , passant par A et perpendiculaire à la droite l .

Veuillez rendre ces feuilles avec votre travail, merci!

Problème 3 : Suites (à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

Considérons la suite réelle (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2}, \text{ avec } u_1 = 0 \text{ et } u_2 = 1.$$

- 3.1 Calculer les termes u_3 , u_4 et u_5 de cette suite.
- 3.2 A l'aide d'une démonstration par récurrence, prouver que cette suite vérifie la relation suivante pour tout nombre entier strictement positif n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

Considérons maintenant la suite (w_n) définie pour tout nombre entier positif par $w_n = u_n + \frac{1}{3}$.

- 3.3 Montrer que cette suite (w_n) est géométrique et donner son premier terme w_1 et sa raison r .
- 3.4 Exprimer w_n et u_n en fonction de n .
- 3.5 La suite (w_n) converge-t-elle ? Justifier brièvement votre réponse.
- 3.6 Pour quelles valeurs de n les termes de la suite (w_n) sont-ils supérieurs à un million ?
- 3.7 Calculer la somme S_{50} des 50 premiers termes de la suite (w_n) :
 $S_{50} = w_1 + w_2 + \dots + w_{50}$.

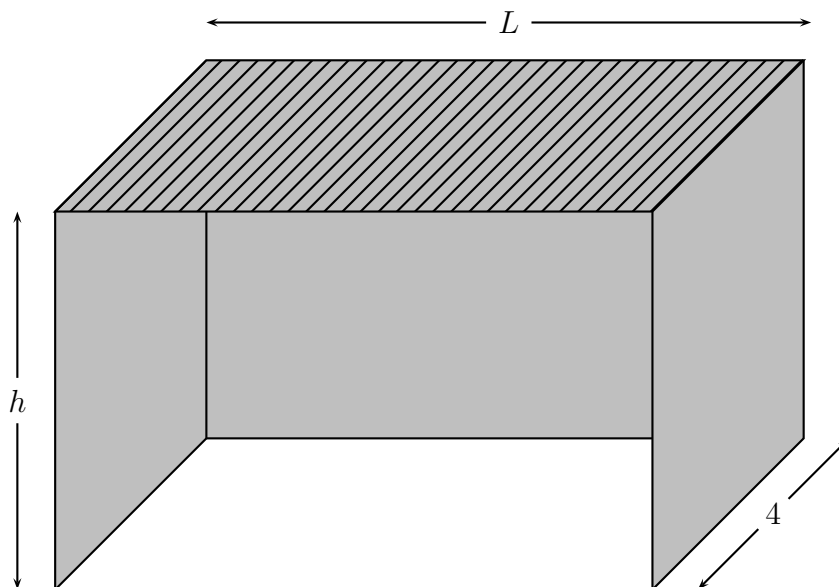
Problème 4 : Probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On suppose pour ce problème que les événements “être né un lundi”, “être né un mardi”, ... , “être né un dimanche”, sont équiprobables. De plus, quand on dit “un jour de la semaine”, on entend un des sept jours de la semaine.

- 4.1 On interroge une personne choisie au hasard. Quelle est la probabilité que cette personne soit née un samedi ou un dimanche ?
- 4.2 On interroge quatre personnes choisies au hasard. Quelle est la probabilité qu'exactement deux personnes soient nées un lundi ?
- 4.3 On interroge trois personnes choisies au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles soient nées le même jour de la semaine ?
- 4.4 On interroge cinq personnes choisies au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes nées des jours de semaine différents ?
- 4.5 Combien de personnes au minimum faut-il interroger pour que la probabilité d'en trouver au moins une qui soit née un dimanche soit supérieure à 83% ?
- 4.6 En utilisant une approximation par la loi normale, calculer la probabilité que, parmi 600 personnes, plus de 100 soient nées un lundi.

Problème 5 : Optimisation (à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

On considère un abri formé de trois parois verticales rectangulaires et d'un toit plat rectangulaire (voir figure ci-dessous).



L'abri est profond de 4 mètres, de largeur L mètres et de hauteur h mètres.
Les parois verticales reviennent à CHF 80.- le m^2 et le toit à CHF 100.- le m^2 .

- 5.1 On désire construire un abri de 100 m^3 . Déterminer les dimensions L et h pour que le coût soit minimal. Quel est ce coût ?
- 5.2 On dispose de CHF 5'000.- pour construire un abri. Montrer que, sous ces contraintes budgétaires, le volume que l'on peut obtenir est défini, en fonction de L , par la relation :

$$V(L) = \frac{L(250 - 20L)}{8 + L}$$