



EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - ÉTÉ 2010

MATHÉMATIQUES
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Problème 1 :	/ 13 points
Problème 2 :	/ 13 points
Problème 3 :	/ 12 points
Problème 4 :	/ 12 points
Problème 5 :	/ 12 points
Total :	/ 50 points

Prénom :

Numéro :

Correcteur : Date : Signature :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 (13 points)

Obligatoire

ANALYSE

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$.

1.1 Effectuer l'étude complète de cette fonction f en traitant les points suivants :

- le domaine de définition de f ;
- les intersections avec les deux axes;
- les éventuelles asymptotes de f ;
- le calcul de la dérivée $f'(x)$ et de la dérivée seconde $f''(x)$;
- les domaines de croissance/décroissance de f et ses éventuels extremums (à l'aide d'un tableau);
- la courbure et les éventuels points d'inflexion de f (à l'aide d'un tableau);
- la représentation graphique de f , en traçant également les asymptotes éventuelles.

1.2 Considérons le domaine D délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = \alpha$, où $\alpha > -1$.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du nombre α le volume de révolution V obtenu par la rotation de ce domaine D autour de l'axe Ox vaut exactement $\frac{\pi}{3}(\alpha + 4)$.

Problème 2 (13 points)**Obligatoire****NOMBRES COMPLEXES**

On donne la fonction complexe $f(z) = z^3 - 3i \cdot z^2 - 2z + 9i$.

- 2.1 Résoudre l'équation $f(z) = 9i$ et montrer que les trois solutions sont sur une même droite du plan de Gauss.
- 2.2 Prouver que le nombre $w_1 = 3i$ est un point fixe de cette fonction f , c'est-à-dire qu'il satisfait l'équation $f(z) = z$.
- 2.3 Déterminer w_2 et w_3 , les deux autres points fixes de f , c'est-à-dire les deux autres solutions de l'équation $f(z) = z$.
- 2.4 Démontrer par un calcul que les trois points fixes w_1 , w_2 et w_3 de f sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Rappel : on nomme axe imaginaire l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est nulle.

- 2.5 Montrer que si un nombre z est sur l'axe imaginaire, son image $f(z)$ sera également sur l'axe imaginaire.
 - 2.6 Trouver les nombres réels dont les images par f sont sur l'axe imaginaire.
-

Problème 3 (12 points)**Au choix avec les
problèmes 4 et 5****PROBABILITÉS**

Un examen comprend 10 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont proposées, dont une seule est la bonne. Pour réussir cet examen, il faut répondre correctement à au moins 9 questions.

L'étudiant Albert se présente à l'examen sans préparation et répond au hasard à chaque question.

- 3.1 Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à au moins une question ?
- 3.2 Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à exactement 3 questions ?

L'étudiant Bernard a préparé son examen de telle manière que pour chaque question :

- la probabilité qu'il réponde au hasard est égale à $\frac{1}{10}$;
- la probabilité qu'il ne réponde pas au hasard est égale à $\frac{9}{10}$ et, dans ce cas, on admet qu'il réponde correctement.

L'étudiant Bernard se présente à l'examen.

- 3.3 Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à la première question ?
- 3.4 Quelle est la probabilité que, parmi ses deux premières réponses, une seule soit juste ?
- 3.5 Sachant que sa première réponse est juste, calculer la probabilité qu'il n'ait pas répondu au hasard à cette question.
- 3.6 Calculer la probabilité qu'il réussisse son examen.

Problème 4 (12 points)Au choix avec les
problèmes 3 et 5**ALGÈBRE LINÉAIRE**

Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique, on considère l'application linéaire f qui, à un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le vecteur $\begin{pmatrix} 3x - \frac{5}{2}y \\ -6x + 5y \end{pmatrix}$.

- 4.1 Déterminer la matrice M de f .
 - 4.2 Montrer que l'application f n'est pas bijective.
 - 4.3 Déterminer les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
 - 4.4 Déterminer le noyau [noté $\text{Ker}(f)$] et l'image [notée $\text{Im}(f)$] de f .
 - 4.5 Déterminer le vecteur $\vec{u}$ de $\text{Ker}(f)$ dont la première composante vaut 10.
Déterminer le vecteur $\vec{v}$ de $\text{Im}(f)$ dont la deuxième composante vaut 4.
Montrer alors que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 - 4.6 Déterminer la matrice M' de f dans cette nouvelle base $(\vec{u}; \vec{v})$.
 - 4.7 En déduire que f est la composée d'une projection vectorielle (dont on donnera la direction et la base) et d'une homothétie vectorielle (dont on donnera le rapport).
-

Problème 5 (12 points)Au choix avec les
problèmes 3 et 4**GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE**

On donne quatre points : $A(1; 2; 0)$, $B(6; 2; 5)$, $C(3; -2; 0)$ et $D(-2; -2; -5)$.

- 5.1 Donner l'équation cartésienne du plan (ABC) .
- 5.2 Vérifier que le point D appartient aussi au plan (ABC) .
- 5.3 Établir des équations paramétriques des droites (AC) et (BD) , puis calculer les coordonnées du point d'intersection E de ces deux droites (AC) et (BD) .
- 5.4 Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un losange et calculer son aire.
- 5.5 Calculer l'angle aigu θ déterminé par la droite (BD) et le plan d'équation $z=0$.
- 5.6 Calculer la distance δ du plan (ABC) à l'origine.
- 5.7 Trouver le point P du plan (ABC) qui est le plus proche de l'origine.