

EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ

SESSION D'HIVER 2009

Mathématiques niveau supérieur

Durée : 4 heures

Note :

Nom :

Prénom :

Groupe :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :
- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires
- puis deux problèmes à choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : Analyse (obligatoire ; 14 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$.

1.1 Etudier la fonction f en traitant les points suivants :

- le domaine de définition de f , les zéros et le signe de f ;
- les asymptotes éventuelles de f ;
- la dérivée $f'(x)$ et la dérivée seconde $f''(x)$;
- les intervalles de croissance/décroissance de f ainsi que les coordonnées de ses extremums et points d'inflexion éventuels ;
- la représentation graphique de f .

1.2 Ecrire l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$ et la représenter sur le graphique de f .

1.3 Déterminer la valeur exacte de l'aire du domaine fermé borné D limité par le graphe de f , la droite $y = 1$ et les droites verticales $x = 0$ et $x = \ln(3)$.

Problème 2 : Géométrie (obligatoire ; 14 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère un triangle ABC dont on donne le cercle circonscrit $\gamma : 4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y - 100 = 0$, la droite $AB : x + 2y - 9 = 0$ et le sommet $C(-3; -4)$.

2.1 Déterminer le centre et le rayon du cercle γ .

2.2 Déterminer les coordonnées des points A et B sachant que l'ordonnée de A est inférieure à celle de B .

2.3 Calculer les angles intérieurs du triangle ABC .

2.4 Calculer l'aire du triangle ABC .

2.5 Déterminer le centre et le rayon du cercle η inscrit dans le triangle ABC et donner l'équation de η .

2.6 Faire une figure soignée illustrant la résolution du problème.

Problème 3 : Probabilités (à choix avec les problèmes 4 et 5 ; 11 points)

Dans un salon de jeu se trouvent 4 machines à sous A , B , C et D . La probabilité qu'un joueur gagne lorsqu'il est opposé à l'une des machines B , C , D est égale à 0.3. Cette probabilité vaut 0.6 avec la machine A qui est déréglée.

3.1 Un joueur choisit au hasard une machine et fait une partie.

- a) Quelle est la probabilité qu'il gagne ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il choisisse la machine A et qu'il gagne
- c) Sachant qu'il a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la machine A ?

3.2 Un joueur fait 4 parties sur la machine A .

- d) Quelle est la probabilité qu'il gagne la première partie et une seule des trois autres ?
- e) Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois ?

3.3 En choisissant la machine A , quel est le nombre minimal de parties à jouer pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 0.999 ?

3.4 Deux amis choisissent d'utiliser la machine B et conviennent de jouer à tour de rôle jusqu'à ce que l'un d'eux gagne.

Quelle est la probabilité que le joueur qui commence gagne à sa troisième partie ?

Problème 4 : Algèbre linéaire (à choix avec les problèmes 3 et 5 ; 11 points)

Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique, on considère la famille d'applications linéaires f_m données par leur matrice

$$F_m = \begin{pmatrix} m-2 & 2 \\ m-3 & 2m-7 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}$$

4.1 Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles l'application f_m n'est pas bijective. Préciser pour la plus grande des valeurs m trouvées le noyau et l'image de f_m .

4.2 Déterminer la matrice inverse de F_0 .

4.3 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application f_3 . En déduire que f_3 est une affinité dont on précisera l'axe, la direction et le rapport.

4.4 Déterminer le réel $\lambda \neq 0$ pour que $(\lambda \cdot F_4)^2 = \lambda \cdot F_4$.

Problème 5 : Nombres complexes (à choix avec les problèmes 3 et 4 ; 11 points)

On considère le polynôme à coefficients complexes $g(z) = (az+1-i)(z^2+(-3+i)z+4-3i)$.

5.1 Déterminer le nombre complexe a tel que $g(1) = 4 - 4i$.

5.2 Résoudre l'équation $z^2 + (-3+i)z + 4 - 3i = 0$.

5.3 Déterminer les solutions de l'équation $z^3 = 1 - 2i$ sous forme trigonométrique et algébrique.