

Mathématiques de niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Groupe :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choisir parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur :

Date :

Note :

Problème 1, analyse (obligatoire, 14 points)

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (x+4)}{(x-2)^2}$

- a) Vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1) \cdot (x^2 - 5x - 6)}{(x-2)^3}$
- b) Étudier la fonction (ensemble de définition, zéros et signe, asymptotes, variations et extremums). Représenter soigneusement le graphe de f ainsi que les éventuelles asymptotes.
- c) Établir une équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse 4 et représenter cette tangente sur le même graphique qu'à la question précédente.
- d) Déterminer les paramètres réels a et b pour que $f(x) = x + 6 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$
- e) Calculer l'aire limitée par le graphe de f , la droite $y = x + 6$ ainsi que les droites verticales $x = 6$ et $x = 8$.

Problème 2, algèbre linéaire (obligatoire, 12 points)

On donne une application linéaire f par sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & 4b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels, avec $b \neq 0$.

- a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application f . Montrer en particulier que les vecteurs propres ne dépendent pas de a et b .
- b) On pose $b = 1$. Pour quelles valeurs de a l'application est-elle bijective ?
- c) On pose $b = 1$.
Pour quelles valeurs de a l'application possède-t-elle des vecteurs invariants non nuls ?
On appelle vecteur invariant tout vecteur $\vec{v}$ satisfaisant l'équation $f(\vec{v}) = \vec{v}$.
- d) On pose $a = 2$ et $b = 1$.
Déterminer le noyau ($\text{Ker}(f)$) et l'image ($\text{Im}(f)$) de l'application f .

Mathématiques de niveau supérieur

Problème 3, nombres complexes

(à choix avec les problèmes 4 et 5, 12 points)

On donne la fonction f , de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, par $f(z) = a \cdot z$ où a est un nombre complexe.

a) Déterminer a de sorte que $f\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$.

Donner la réponse sous la forme $x + yi$.

Pour toute la fin du problème, on pose $a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

- b) Donner une interprétation géométrique précise de la fonction f .
- c) On pose $z_0 = 6$, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, ..., $z_n = f(z_{n-1})$. Calculer z_1 , z_2 et z_9 , puis trouver une formule donnant explicitement z_n .
- d) Calculer les longueurs des côtés du triangle de sommets 0 , z_0 , z_1 puis montrer qu'il est rectangle en z_1 . Expliquer ensuite pourquoi tout triangle de sommets 0 , z_{k-1} , z_k est rectangle en z_k .
- e) Tirer profit de la question précédente pour construire la ligne polygonale de sommets z_0 , z_1 , z_2 , ..., z_9 . On prendra une unité égale à 1 centimètre.

Problème 4, géométrie dans l'espace

(à choix avec les problèmes 3 et 5, 12 points)

On considère les cinq points de l'espace $A(-3;8;-10)$, $B(-4;9;-10)$, $C(-5;9;-8)$, $D(-4;8;-8)$ et $E(-5;7;-10)$.

- a) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- b) Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$, ainsi que la valeur de son angle de sommet A .
- c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection S des diagonales du parallélogramme $ABCD$.
- d) Calculer le volume V du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$, puis en déduire la distance du point E au plan contenant le parallélogramme $ABCD$.
- e) La droite n est normale au plan contenant le parallélogramme $ABCD$ et passe par le point E . Établir une représentation paramétrique de cette normale n .

Mathématiques de niveau supérieur

Problème 5, probabilités

(à choix avec les problèmes 3 et 4, 12 points)

Parmi les usagers des transports publics d'une grande ville, il y a 90 % d'honnêtes gens et 10 % de resquilleurs.

Les resquilleurs voyagent toujours sans titre de transport. La probabilité qu'une personne honnête voyage sans titre de transport n'est pas nulle; elle vaut 5 % car les honnêtes gens sont parfois distraits.

- a) Quelle est la probabilité qu'un voyageur choisi au hasard soit honnête mais ne possède pas de titre de transport ?
- b) Quelle est la probabilité qu'un voyageur choisi au hasard possède un titre de transport ?
- c) Combien de voyageurs faut-il contrôler au minimum, pour que la probabilité d'en trouver au moins un voyageant sans titre de transport soit supérieure à 99 % ?
- d) Quelle est la probabilité qu'un voyageur ne possédant pas de titre de transport soit un resquilleur ?
- e) Quelle est la probabilité que sur 6 voyageurs choisis au hasard, la moitié soient des resquilleurs ?