

EXAMEN SUISSE DE MATURITE SESSION HIVER 2008

MATHEMATIQUES**Niveau supérieur**

Durée : 4 heures

Nom :

Prénom :

Groupe :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires
- puis deux problèmes à choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 : Analyse (obligatoire)

On envisage la fonction f_a donnée par $f_a(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$, où $a \in \mathbb{R}^*$

- 1.1 Déterminer en fonction de a les coordonnées du point où la tangente au graphe f_a est horizontale et les coordonnées des points d'inflexion du graphe f_a .
- 1.2 Trouver l'équation de la tangente au graphe de f_a en son point d'abscisse $x = a$.
- 1.3 Dessiner le graphe de $f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Soit $b > 0$: calculer $I(b) = \int_0^b f_1(x) dx$, puis $\lim_{b \rightarrow \infty} I(b)$

- 1.4 Soit la fonction $P(x) = \frac{bx}{x^2 + 1} + c \cdot \arctan(x)$, b et $c \in \mathbb{R}$.

Déterminer b et c de la sorte que $P(x)$ soit une primitive de la fonction

$$(f_1(x))^2 = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

- 1.5 Calculer le volume obtenu en faisant tourner le graphe de f_1 autour de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = 1$.

Veillez rendre ces feuilles avec votre travail, merci!

Problème 2 : Nombres complexes (obligatoire)

On considère la fonction f donnée par

$$w = f(z) = iz + 1 - 3i \quad \text{dans } \mathbb{C}$$

- 2.1 Calculer $f(3 - i)$.
- 2.2 Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
- 2.3 Résoudre l'équation $f(z) = z$.
- 2.4 Résoudre l'équation $(f(z))^2 = 2i$.
- 2.5 Trouver deux nombres complexes a et b qui permettent d'écrire $f(z)$ sous forme $f(z) = a(z - b) + b$. En déduire que dans le plan de Gauss f est une rotation et donner le centre et l'angle de rotation.
- 2.6 Trouver l'expression de la fonction réciproque ${}^r f$ de f .

Problème 3 : Algèbre linéaire (à choix avec les problèmes 4 et 5)

Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique, on considère l'application linéaire f donnée par sa matrice

$$F = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

- 3.1 Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
- 3.2 Donner la matrice F^{-1} de la réciproque ${}^r f$ de f .
- 3.3 Trouver l'image par f de la droite d'équation $2x - 7y = 0$.
- 3.4 Trouver une équation cartésienne du cercle c dont l'image par f est le cercle c' d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

On envisage la symétrie g par rapport à la droite d'équation $y = x$ et l'homothétie h de centre $O(0; 0)$ et de rapport $k = 3$.

- 3.5 Donner les matrices G et H des transformations g et h .
- 3.6 On envisage la transformation $k = h \circ g \circ f$. Calculer la matrice K relative à la transformation k .

Problème 4 : Géométrie (à choix avec les problèmes 3 et 5)

On donne les éléments suivants d'un triangle ABC :

- l'équation du côté AB : $x - 7y + 59 = 0$.
- l'équation de la hauteur h_A issue du sommet A : $x + y + 3 = 0$
- le triangle ABC est rectangle en A
- le centre $I(-2; 1)$ du cercle γ inscrit dans le triangle ABC .

- 4.1 Calculer les coordonnées du sommet A .
- 4.2 Calculer le rayon r du cercle γ inscrit dans le triangle ABC et écrire l'équation cartésienne de γ .
- 4.3 Déterminer une équation cartésienne du côté BC .
- 4.4 Calculer les coordonnées du sommet B .
- 4.5 Faire une figure soignée illustrant la résolution du problème (unité 1 carré).

Problème 5 : Probabilité (à choix avec les problèmes 3 et 4)

Dans un pays, on peut envoyer des lettres en courrier A (prioritaire) et en courrier B (normal).

Le service postal s'occupe d'abord du courrier A et 70% de celui-ci arrive à destination le lendemain, alors que 20% du courrier A arrive à destination le surlendemain.

Le courrier B n'arrive jamais le lendemain, mais 80% de celui-ci est délivré le surlendemain.

Dans tous les cas (courrier A et B), le courrier arrive au plus tard le troisième jour après l'expédition.

- 5.1 Quelle est la probabilité qu'une lettre du courrier A arrive le troisième jour après l'expédition ?
- 5.2 On poste deux lettres au courrier A. Quelle est la probabilité qu'elles arrivent toutes deux le surlendemain ?
- 5.3 On poste une première lettre en courrier A et une deuxième en courrier B. Quelle est la probabilité qu'elles arrivent toutes deux le surlendemain ?
- 5.4 Pierre envoie 10 lettres en courrier A. Quelle est la probabilité que 8 lettres au moins arrivent le lendemain à destination ?
- 5.5 Combien de lettres en courrier A faut-il envoyer le même jour pour que la probabilité qu'au moins une de ces lettres arrive le lendemain soit de plus de 99.5% ?

Veuillez rendre ces feuilles avec votre travail, merci!