

EXAMEN SUISSE DE MATURITÉ - ÉTÉ 2008**MATHÉMATIQUES**
niveau supérieur

Durée : 4 heures

Nom :

Problème 1 : 12 points
Problème 2 : 14 points
Problème 3 : 12 points
Problème 4 : 12 points
Problème 5 : 12 points

Prénom :

Groupe :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires,
- puis deux problèmes au choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 (12 points)**Obligatoire****GÉOMÉTRIE de L'ESPACE**

Considérons les deux plans π_1 et π_2 donnés par les équations :

$$\pi_1 : 2x + y - z = 2$$

$$\pi_2 : x + 3y + 7z = 11$$

- 1.1 Calculer l'angle aigu θ que forment ces deux plans π_1 et π_2 .
- 1.2 Donner des équations paramétriques de la droite d_1 formée par l'intersection des plans π_1 et π_2 .

Pour tout nombre réel α , considérons la sphère Σ_α définie par: $(x - \alpha)^2 + (y - 2\alpha)^2 + z^2 = 81$.

- 1.3 Montrer que les centres de toutes ces sphères Σ_α se trouvent sur une même droite d_2 et donner des équations paramétriques de d_2 .
- 1.4 Prouver que toutes ces sphères Σ_α présentent comme intersection avec le plan d'équation $z = 0$ des cercles de même rayon, et donner la valeur de ce rayon.
- 1.5 Déterminer pour quelles valeurs du paramètre α ces sphères Σ_α possèdent plus d'un point commun avec le plan d'équation $y = 0$.
- 1.6 On note C_α le centre de la sphère Σ_α .
Trouver la valeur de α pour laquelle la distance du point $A(-3;14;8)$ à C_α est minimale.
En déduire la distance de A à cette sphère Σ_α .
Calculer le point B sur cette sphère Σ_α qui est le plus proche du point A .

Problème 2 (14 points)**Obligatoire****ANALYSE**

Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto (x - a) \cdot \ln(x - a)$, où a est une constante.

- 2.1 Calculer les fonctions dérivées f' et f'' .
- 2.2 Montrer que le graphe de f ne possède pas de point d'inflexion, quelle que soit la valeur de la constante a .
- 2.3 Trouver la valeur de a pour laquelle le graphe de f possède un point à tangente horizontale d'abscisse égale à $\frac{2}{e}$.

Pour toute la fin du problème, on pose $a = \frac{1}{e}$.

- 2.4 Procéder à une étude complète de la fonction f , en traitant les points suivants :
 - le domaine de définition de f ;
 - les tableaux de signe de f et de f' ;
 - les zéros et les extrema, ainsi que les domaines de croissance/décroissance de f ;
 - les limites : $\lim_{x \rightarrow e^{-1}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^{-1}} f'(x)$;
 - la représentation graphique de f .
- 2.5 Établir l'équation de la tangente t au graphe de f , sachant que la pente de t est égale à 1.
- 2.6 On considère la surface S délimitée par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = 1 + \frac{1}{e}$ et $x = 2$. Hachurer cette surface S sur votre graphique, puis calculer son aire.

Problème 3 (12 points)**Au choix avec les
problèmes 4 et 5****SUITES**

On pose $(x_1; y_1) = (2; 1)$ et on définit par récurrence la suite $(x_n; y_n)$ ainsi :

$$(x_{n+1}; y_{n+1}) = (2x_n + 3y_n; x_n + 2y_n), \text{ pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

On considère également la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{x_n}{y_n}$, pour tout nombre entier $n \geq 1$.

- 3.1 Calculer $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$, $(x_5; y_5)$, u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- 3.2 Montrer par récurrence que $y_n > 2^{n-1}$, pour tout nombre entier $n > 1$.
- 3.3 Montrer par récurrence que $(x_n)^2 - 3(y_n)^2 = 1$, pour tout nombre entier $n > 1$.

En déduire que $(u_n)^2 - 3 = \frac{1}{(y_n)^2}$, pour tout nombre entier $n > 1$.

- 3.4 Montrer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$.

Problème 4 (12 points)**Au choix avec les
problèmes 3 et 5****PROBABILITÉS**

Au collège des Sapins, dans la classe de terminale T1, il y a 25 élèves, dont 15 garçons. Pour s'assurer que les élèves travaillent régulièrement, le professeur de mathématiques interroge à chaque cours un élève choisi au hasard. Cependant, le professeur ne se souvient pas de l'élève interrogé d'une leçon à l'autre, ce qui fait qu'à chaque fois, tous les élèves ont la même probabilité d'être interrogés.

- 4.1 Calculer la probabilité que l'élève interrogé lors du premier cours de l'année soit un garçon.
- 4.2 Calculer la probabilité que l'élève interrogé lors du huitième cours de l'année soit une fille.
- 4.3 Calculer la probabilité que 4 filles et 6 garçons soient interrogés durant les 10 prochains cours.
- 4.4 Calculer le plus petit nombre entier n pour lequel la probabilité qu'aucun garçon ne soit interrogé durant n cours consécutifs est inférieure à 0,002 %.
- 4.5 Si le trimestre comporte 35 leçons, calculer le nombre moyen de filles qui seront interrogées.
- 4.6 Lors de l'examen de maturité oral, les probabilités respectives de tirer une question de géométrie, de probabilités, d'algèbre linéaire ou d'analyse forment une progression géométrique de raison 3. Il n'y a pas d'autres sujets possibles.
Calculer la probabilité qu'un candidat tire une question portant sur l'algèbre linéaire.
- 4.7 Après des années d'expérience, on a constaté que le temps utilisé par les élèves pour répondre aux questions de l'examen écrit de maturité est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 208 minutes et d'écart-type 18 minutes.
Quelle est la probabilité qu'un élève rende sa copie avant 190 minutes ?

Problème 5 (12 points)**Au choix avec les
problèmes 3 et 4****ALGÈBRE LINÉAIRE**

Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée, une transformation f est donnée par sa matrice F :

$$F = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Soient les vecteurs } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et la matrice } G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 5.1 Calculer $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, où " $\times$ " désigne le produit vectoriel.
- 5.2 Trouver les images par f des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.
- 5.3 Résoudre l'équation $f(\vec{v}) = \vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
- 5.4 Montrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan α et donner l'équation de ce plan α .
- 5.5 Trouver l'image par f du plan β d'équation $2x - 3y + z = 0$.
- 5.6 Considérons l'application g donnée par la matrice G ci-dessus. La transformation h est définie par la relation $h = g \circ f$. Donner la matrice H de h .
- 5.7 Vérifier que $h(\vec{d}) = \vec{d}$, pour $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.